Επταχυντές - Ανιχνευτές

Δ. Σαμψωνίδης & Κ.Κορδάς

Ανιχνευτές : Μάθημα 1

Ενεργός διατομή αλληλεπίδρασης σωματιδίων, μέση ελεύθερη διαδρομή σωματιδίου

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Μετρήσιμες ποσότητες

- Παρατηρώντας τη φύση για να καταλάβουμε ποιά είναι τα στοιχειώδη σωμάτια και πώς αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, έχουμε τα εξής πειραματικά εργαλεία (μετρήσεις):
  - Pacticle scattering (σκέδαση σωματιδίων)
  - Particle decays (π.χ., $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$)
  - Bound states of particles: “δέσμιες καταστάσεις”, π.χ., άτομο, μεζόνιο J/ψ (=c $\bar{c}$)

Ενεργός διατομή αλληλεπίδρασης και ρυθμός αλληλεπιδράσεων

Τι μπορεί να πάθουν δυό σωματίδια που περνά το ένα από τη γειτονιά του άλλου;

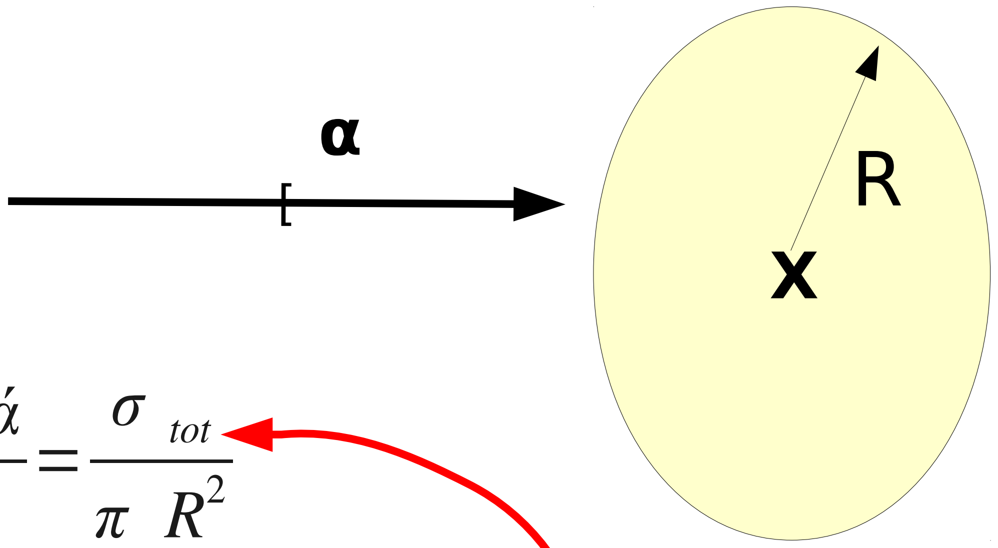
- Ή δεν θα “αισθανθεί” κανείς την παρουσία του άλλου

- Ή θα αλληλεπιδράσουν
  - Η **“ενεργός διατομή” της αλληλεπίδρασης** δίνει ένα μέτρο της πιθανότητας αλληλεπίδρασης

  - Βιβλίο Cottingham & Greenwood (C&G): Παράρτημα A.1-A.3
  - Σκέδαση Rutherford : (C&G): Παράρτημα A.4

Αλληλεπιδράσεις και ενεργός διατομή: “1+1”

- Όταν έχουμε σκέδαση δύο σωματιδίων, μιλάμε για την ενεργό διατομή της αλληλεπίδρασης
- Έστω <u>ένα</u> σωματίδιο **α** που προσεγγίζει από κάποια απόσταση <u>έναν</u> ακίνητο πυρήνα **X,** και προσπίπτει τυχαία οπουδήποτε σε μια επιφάνεια π R^2 με κέντρο τον πυρήνα



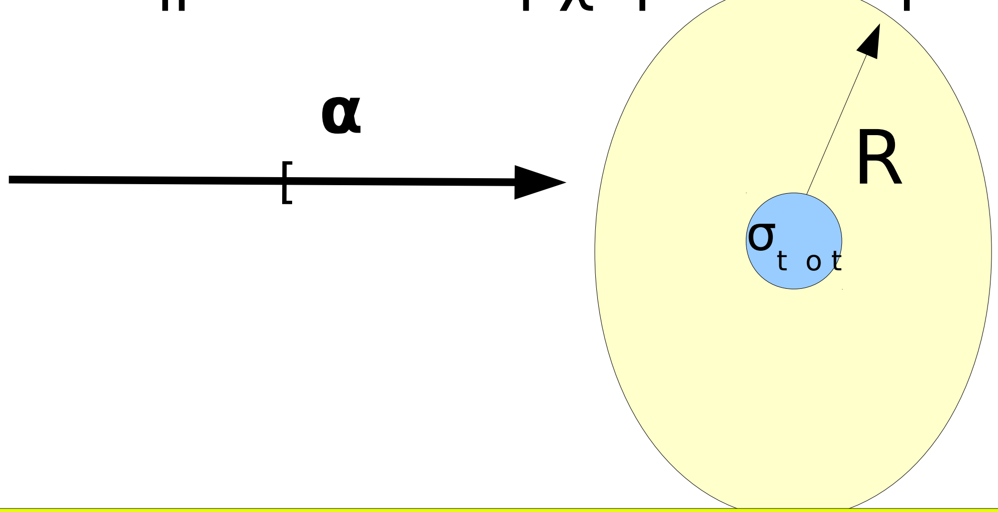
Πιθανότητα αλληλεπίδρασης = $\dfrac{\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}}{\pi\ R^2} = \dfrac{\sigma_{tot}}{\pi\ R^2}$

σ_{tot} = Ενεργός διατομή της αλληλεπίδρασης

μονάδες επιφανείας, σε barn (“b”). 1b = $(10\ \mathrm{fm})^2$

Ενεργός διατομή

- Όταν έχουμε σκέδαση δύο σωματιδίων, μιλάμε για την ενεργό διατομή της αλληλεπίδρασης
- Η ενεργός διατομή μπορεί να θεωρηθεί σαν την “ενεργό επιφάνεια” που παρουσιάζει ο πυρήνας X σε σημειακό επερχόμενο σωματίδιο α

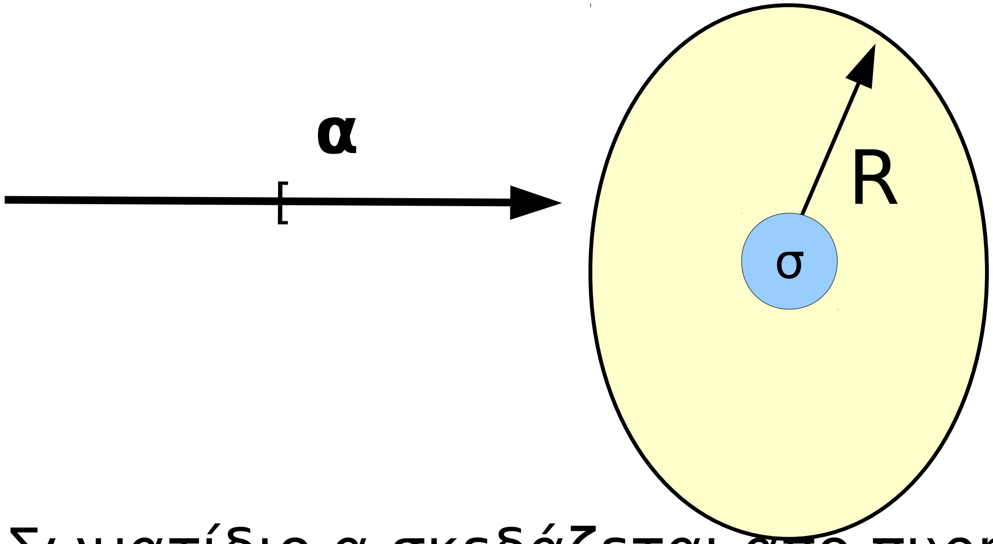


→ **Αλλά δεν είναι το ίδιο!**
Δεν έχουμε “hit or miss” στην αλληλεπίδραση σωματιδίων.

Βέβαια, η ενεργός διατομή δεν είναι γεωμετρικός παράγοντας, αλλά συλλογική ιδιότητα των δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν.
Εξαρτάται και από τον τύπο των σωματιδίων και από την ενέργειά τους

Μιά αίσθηση μεγέθους ενεργών διατομών

- Ας πάρουμε τη γεωμετρική θεώρηση μιας σκέδασης



- Σωματίδιο α σκεδάζεται από πυρήνα με ακτίνα r =6 fm.
- Αν θεωρήσουμε το α σημειακό που πέφτει τυχαία οπουδήποτε στον μεγάλο κύκλο R, και επίσης θεωρήσουμε την επιφάνεια **σ** που παρουσιάζει ο πυρήνας σαν την "*ενεργό*" *επιφάνεια αλληλεπίδρασης*, τότε η ενεργός διατομή αλληλεπίδρασης είναι $\sigma = \pi * r^2 = 113\ fm^2 = 1.13\ mb$
- πιθανότητα το α να πέσει πάνω στον πυρήνα = $\pi * r^2 / \pi * R^2 = \sigma / (\pi * R^2)$, με σ=1.13 mb, που είναι σωστή τάξη μεγέθους για ισχυρές αλληλεπιδράσεις.

Ενεργός διατομή: επί μέρους και ολική

- **Η ενεργός διατομή δεν είναι γεωμετρικός παράγοντας**
- Εξαρτάται από τα σωματίδια που αλληλεπιδρούν και τις ενέργειές τους
  - π.χ. σ(π+p) > σ(e+p) > σ(ν+p)
- Ανάλογα με την ερώτηση που θέλουμε να απαντήσουμε, μπορεί να εξαρτάται επίσης και από τα παραγόμενα σωματίδια και τα χαρακτηριστικά τους
  - Μπορούμε να ορίσουμε τις “επί μέρους ενεργές διατομές” = “exclusive cross section”) = $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}$
    - π.χ., σ(pp → W), σ(pp → Z)
  - “ολική ενεργός διατομή” = “inclusive cross section” = $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{tot}} = \boldsymbol{\Sigma}\, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}$
    - π.χ., $\sigma_{tot}(pp) = \sigma(pp \to W) + \sigma(pp \to Z) + \ldots$

Παράδειγμα: ενεργός διατομή

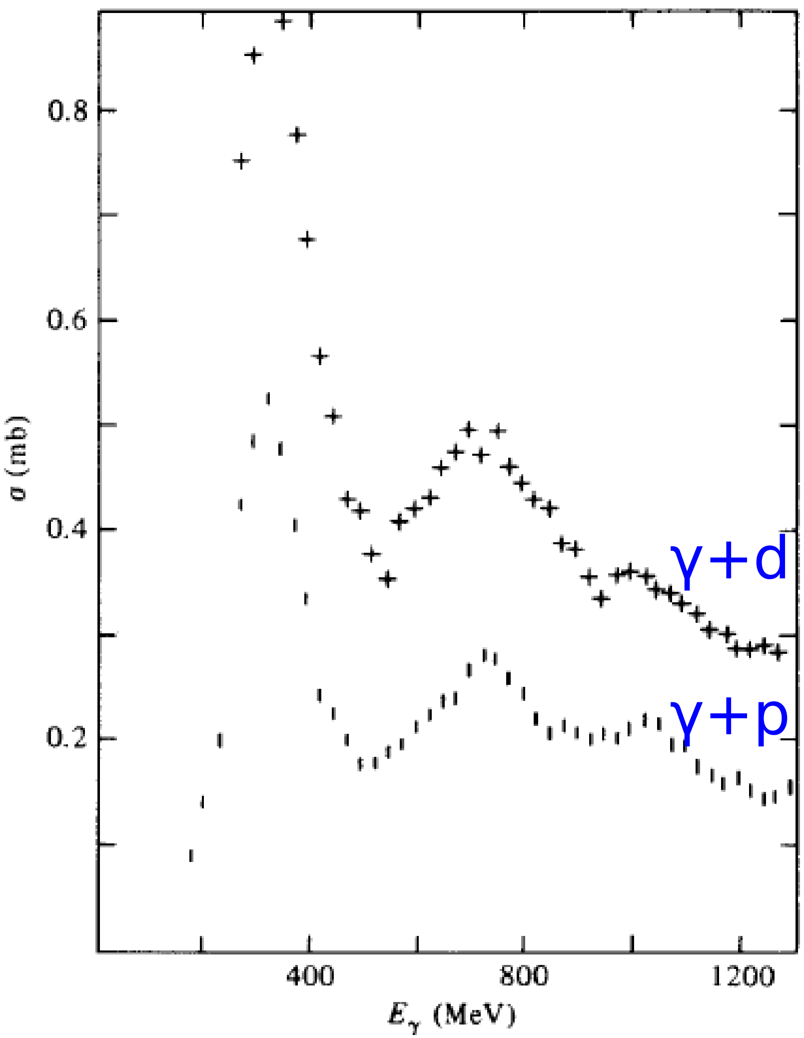


Fig. 3.1 The total photon cross-section for hadron production on protons (dashes) and deuterons (crosses). The difference between these cross-sections is approximately the cross-section on neutrons. (After Armstrong, T. A. *et al.* (1972), *Phys. Rev.* **D5**, 1640; *Nucl. Phys.* **B41**, 445.)

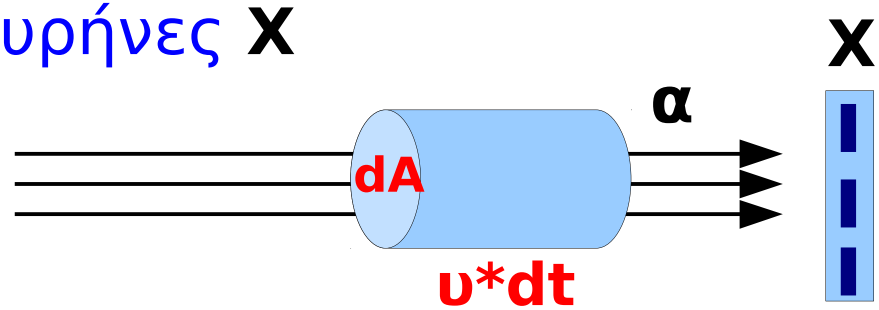
- Η ενεργός διατομή είναι συλλογική ιδιότητα των δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν:

  εξαρτάται από τον τύπο των σωματιδίων και την ενέργειά τους

Σχήμα 3.1 στο βιβλίο πυρηνικής C&G (5ου εξαμήνου)

Ενεργός διατομή και ρυθμός αντίδρασης: "πολλά+1"

- Δέσμη σωματιδίων **α**, προσπίπτει με ταχύτητα υ σε υλικό με πυρήνες **X**



ρ_α = αριθμητική πυκνότητα όγκου δέσμης σωματιδίων α

- Αριθμητική πυκνότητα της δέσμης α = ρ_α = αριθμός σωματιδίων α, ανά μονάδα όγκου
- Ροή των σωμματιδίων α = Φ = αριθμός σωματιδίων α που περνούν ανά μονάδα επιφάνειας, ανά μονάδα χρόνου = $\rho_\alpha * \upsilon$ [γιατί σε χρόνο dt από την επιφάνεια dA περνούν $\rho_\alpha * dA * \upsilon * dt$ σωματίδια α] $\Phi = \rho_\alpha * \upsilon$
- Αριθμός α που διέρχεται από επιφάνεια πR^2 γύρω έναν πυρήνα X, στη μονάδα χρόνου (dt=1) : $\rho_\alpha * \upsilon * \pi R^2 = \Phi * \pi R^2$
- Θυμάστε: πιθανότητα αλληλεπίδρασης ενός α με έναν X = $\dfrac{\sigma}{\pi R^2}$
- Ρυθμός (dN/dt) αλληλεπίδρασης σωμματιδίων α **<u>με έναν πυρήνα X</u>** = $(\rho_\alpha * \upsilon * \pi R^2) * (\sigma / \pi R^2) = \rho_\alpha * \upsilon * \sigma_{tot} = \Phi * \sigma_{tot}$ => **$dN/dt = \Phi * \sigma_{tot}$**
<u>= ροή προσπίπτοντων σωματιδίων * ενεργός διατομή αλληλεπίδρασης</u>

Χρηστικός ορισμός ενεργού διατομής, σ

- Αν έχουμε την αντίδραση

α + Χ → οτιδήποτε

$$\Pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \alpha\lambda\lambda\eta\lambda\varepsilon\pi\acute{\iota}\delta\rho\alpha\sigma\eta\varsigma\ \varepsilon\nu\acute{o}\varsigma\ \beta\lambda\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ \mu\varepsilon\ \acute{\varepsilon}\nu\alpha\ \sigma\tau\acute{o}\chi o = \frac{\sigma}{\varepsilon\pi\iota\varphi\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\ \pi o\upsilon\ \varphi\omega\tau\acute{\iota}\zeta o\upsilon\nu\ \tau\alpha\ \beta\lambda\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha}$$

Αν μια δέσμη σωματιδών α, με **ροή Φ** σωματίδια ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου, συγκρούεται με **ΕΝΑ** σωματίδιο τύπου Χ , τότε:

$$R \equiv \frac{dN}{dt} = \Phi\,\sigma\,,\ \acute{o}\pi o\upsilon : \Phi = \rho_{\alpha} * \upsilon\,,\ \mu\varepsilon\ \rho_{\alpha} = \alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \pi\upsilon\kappa\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \tau\omega\nu\ \alpha$$

- Ο ρυθμός αλληλεπιδράσεων (R = dN/dt) είναι

R = dN/dt = σ * Φ →
$$\boxed{\sigma = \frac{R}{\Phi}} \rightarrow \sigma \frac{R}{\rho_{\alpha}\upsilon} = \frac{R}{\rho_{\alpha}}\frac{1}{\upsilon}$$

οπότε μπορούμε χρηστικά να ορίσουμε την ενεργό διατομή σ, ως το ρυθμό αλληλεπιδράσεων ανά μονάδα ροής των προσπίπτοντων σωματιδίων και ανά σωματίδιο στόχου

Πέρασμα δέσμης μέσα από υλικό με πολλούς πυρήνες: “πολλά + πολλά”

- Όταν μια δέσμη πολλών σωματιδίων α, πέφτει πάνω σε N_X πυρήνες, τότε ο ρυθμός αλληλεπιδράσεων είναι N_X φορές μεγαλύτερος απ' ότι αν η δέσμη των σωματιδιων α έπεφτε σε στόχο με έναν μόνο πυρήνα X:

$$dN/dt = N_X * (\Phi * \sigma)$$

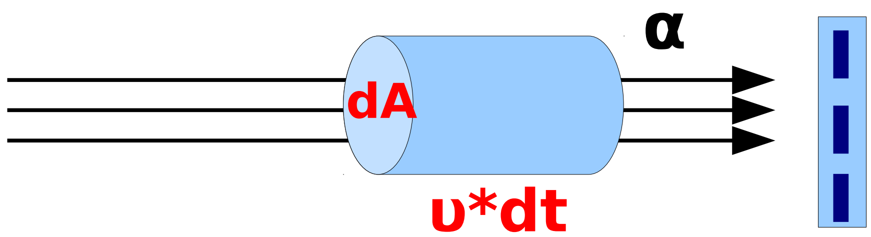
- Αν η δέσμη των σωματιδίων α έχει **επιφάνεια A** (αλληλεπικάλυψης με το στόχο), και πέφτει πάνω στο στόχο που έχει **πάχος dx**,
- Αν οι πυρήνες X έχουν αριθμητική πυκνότητα όγκου: ρ_X (=αριθμός πυρήνων / cm^3),

τότε: $N_X = \rho_X * \text{όγκος} = \rho_X * A * dx$

Οπότε:
$dN/dt = (\rho_X * A * dx * \Phi) * \sigma$

Ενεργός διατομή και μέση ελεύθερη διαδρομή: “1+πολλά”

- Κατ' αντιστοιχία με σέσμη σωματιδίων α, πού προσπιτει με ταχύτητα υ σε υλικό με πυρήνες X



ρ_x = αριθμητική πυκνότητα όγκου πυρήνων X

- Και κατ' αντίστοιχα με την ανάλυση “πολλά + 1”, έχουμε:

  Ρυμός αντιδράσεων (R=dN/dt) **<u>ενός σωματιδίου α</u>** με τους πυρήνες X του στόχου: $dN/dt = \rho_x * \upsilon * \sigma_{tot}$

  – (σαν να είμαι πάνω στο α και να βλέπω τους πυρήνες X να έρχονται με ταχύτητα υ , οπότε έχω: ροή των σωματιδίων X * ενεργός διατομή αλληλεπίδρασης)

- Για **μία** αλληλεπίδραση (dN/dt=1/dt) απαιτείται κατά μέσο όρο χρόνος $\tau = \mathbf{1}/(\rho_x * \upsilon * \sigma_{tot})$

- Μέση ελεύθερη διαδρομή, **$L = \tau * \upsilon = 1/(\rho_x * \sigma_{tot})$** **!**

Αλλος τρόπος πρός τη μέση ελεύθερη διαδρομή (1/3)

F = ροή προσπίπτοντων (flux)
N = αριθμητική πυκνότητα
κέντρων σκέδασης
A = επιφάνεια αλληλεπικάλυψης
προσπίπτοντων και στόχου

The average number scattered into $d\Omega$ per unit time is then

$$N_s(\Omega) = FA\,N\,\delta x\,\frac{d\sigma}{d\Omega}\,.$$

The total number scattered into all angles is similarly

$$N_{\text{tot}} = FA\,N\,\delta x\,\sigma\,.$$

If the beam is smaller than the target, then we need only set A equal to the area covered by the beam. Then $FA \to n_{\text{inc}}$, the total number of incident particles per unit time. In both cases, now, if we divide (2.4) by FA, we have the probability for the scattering of a *single* particle in a thickness δx,

$$\boxed{\text{Prob. of interaction in } \delta x = N\sigma\,\delta x\,.} \quad = w(x)\ \delta(x) \qquad (2.5)$$

This is an important quantity and we will come back to this probability later.

Αλλος τρόπος πρός τη μέση ελεύθερη διαδρομή (2/3)

$P(x)$: probability of *not* having an interaction after a distance x,
$w\,dx$: probability of having an interaction between x and $x+dx$.

The probability of *not* having an interaction between x and $x+dx$ is then

$$P(x+dx) = P(x)(1 - w\,dx)\ ,$$

$$P(x) + \frac{dP}{dx}dx = P - Pw\,dx\ ,$$

$$dP = -wP\,dx\ ,$$

$$P = C\exp(-wx)\ ,$$

P(x) =
πιθανότητα
να έχει επιζήσει χωρίς να αλληλεπιδράσει μέχρι το x
= survival probability

w(x) =
πυκνότητα πιθανότητας (=πιθανότητα ανά μονάδα μήκους) για αλληλεπίδραση μεταξύ x και x+dx

$P_{int}(x)$ = Πιθανότητα να έχει κάνει αλληλεπίδραση οπουδήποτε μέχρι το x = 1 – P(x)

while the probability of the particle suffering a collision between x and $x+dx$ after surviving the distance x is

$$F(x)\,dx = \exp(-wx)\,w\,dx\ . \tag{2.8}$$

Now let us calculate the mean distance, λ, traveled by the particle without suffering a collision. This is known as the *mean free path*. Thus,

$$\lambda = \frac{\int xP(x)\,dx}{\int P(x)\,dx} = \frac{1}{w}\ . \tag{2.9}$$

Μέση ελεύθερη διαδρομή

Για μικρές αποστάσεις δx: $P_{\rm int} = 1 - \left(1 - \frac{\delta x}{\lambda} + \ldots\right) \simeq \frac{\delta x}{\lambda}$

Αλλος τρόπος πρός τη μέση ελεύθερη διαδρομή (3/3)

Για μικρές αποστάσεις δx: $P_{\text{int}} = 1 - \left(1 - \frac{\delta x}{\lambda} + \dots\right) \simeq \frac{\delta x}{\lambda}$

$\lambda = 1/N\sigma$ **← Μέση ελεύθερη διαδρομή**

so that our survival probability becomes

$$P(x) = \exp\left(\frac{-x}{\lambda}\right) = \exp(-N\sigma x)\,,$$

$P_{int}(x)$ = Πιθανότητα να έχει κάνει αλληλεπίδραση οπουδήποτε μέχρι το x = 1 – P(x)

$$P_{\text{int}}(x) = 1 - \exp\left(\frac{-x}{\lambda}\right) = 1 - \exp(-N\sigma x)\,,$$

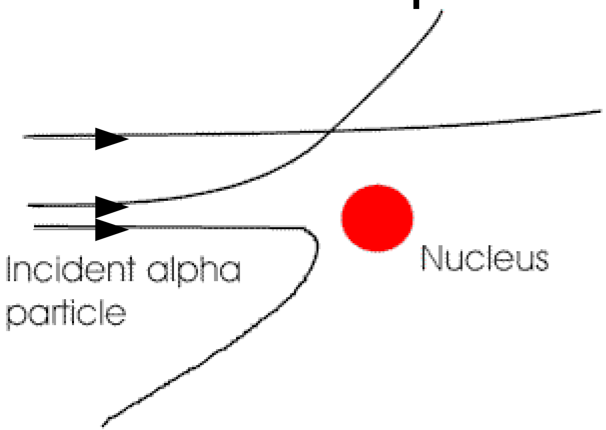
$$F(x)\,dx = \exp\left(\frac{-x}{\lambda}\right)\frac{dx}{\lambda} = \exp(-N\sigma x)\,N\sigma\,dx\,.$$

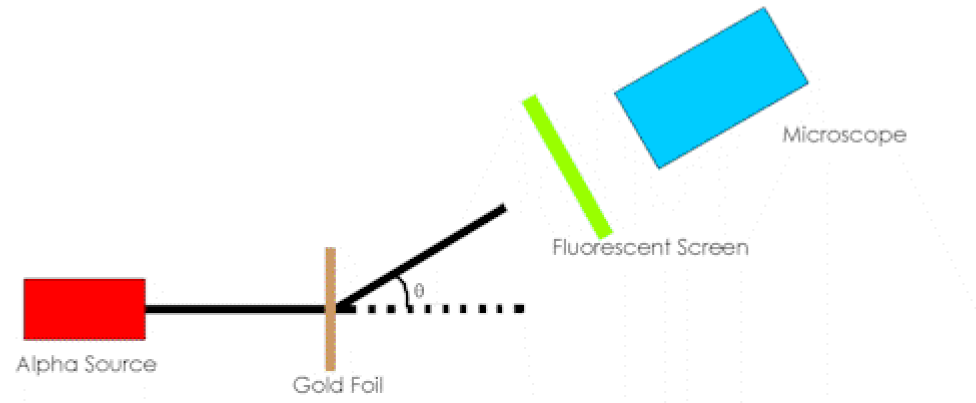
← Πιθανότητα να κάνει αλληλεπίδραση μεταξύ x και x+dx afo;otoy έχει επιζήσει μέχρι το x

Αν το υλικό μου έχει 2 είδη σωματιδίων σκέδασης X και Y τότε: $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_X} + \frac{1}{\lambda_Y} = \frac{1}{N_X \sigma_X} + \frac{1}{N_X \sigma_X}$

Στερεά γωνία και σκεδάσεις (1/2)

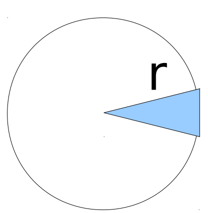
- Rutherford: Σωματίδια α σκεδάζονται από πυρήνες χρυσού





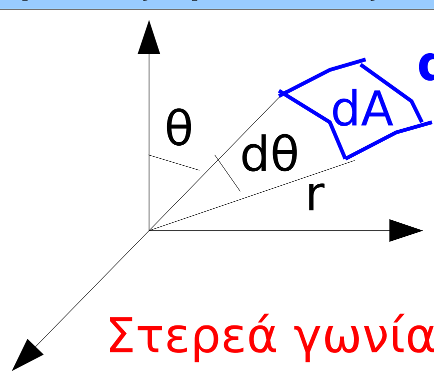
- Μετράω σε κάθε θέση θ, πόσα σωματίδια α “βλέπω” μέσα σε χρόνο dt:
  Επειδή **dN/dt = ροή * σ** , έχω **dN = ροή * dt * σ**

- Επίσης μετράω τον αριθμό των σωματιδίων dN, ανά μονάδα στερεάς γωνίας dΩ: Δηλαδή μετράω dN/dΩ



dθ=ds/r

Γωνία: θ



Στερεά γωνία: Ω

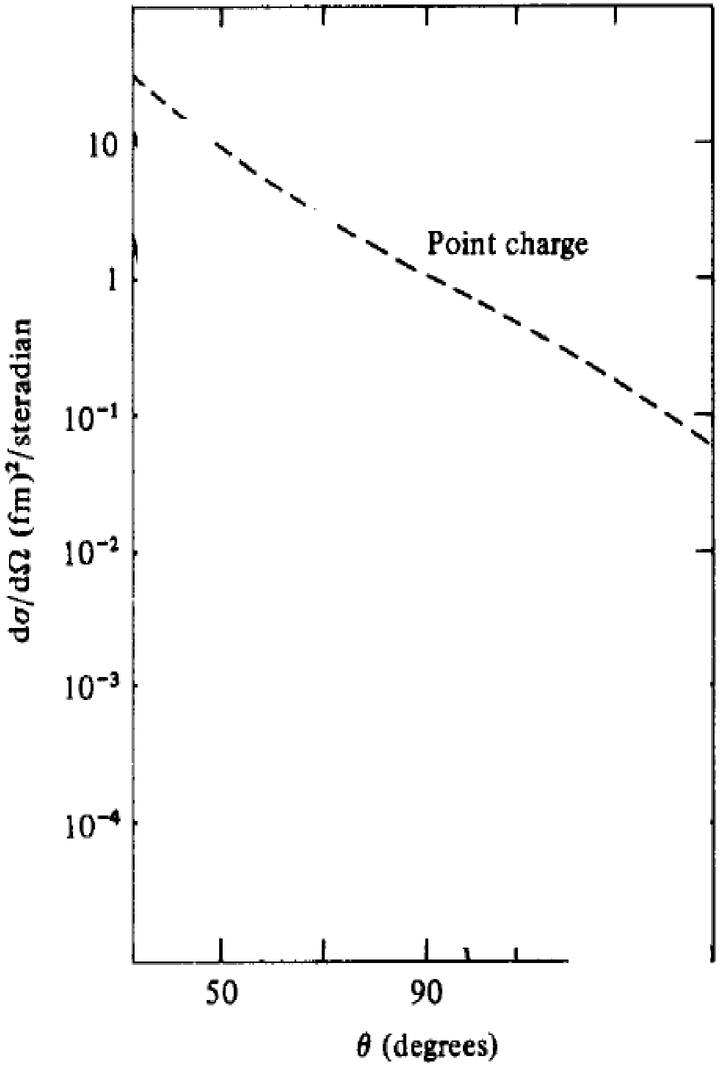
$d\Omega = dA/r^2$ = (r*dθ * r*sinθ*dφ) / r^2 = dφ * sinθ * dθ

→ αν δεν με ενδιαφέρει το φ, ολοκληρώνω και παίρνω 2π απ'αυτό:

$$d\Omega = 2\pi * \sin\theta * d\theta = 2\pi * d(\cos\theta)$$

Στερεά γωνία και σκεδάσεις (2/2)

- Αν ο πυρήνας είναι σημειακό φοτίο: Rutherford approximatιon (σημείωση: **dσ** για αλληλεπίδραση που δίνει σκεδαζόμενα σωματίδια σε γωνία **θ** εως **θ+dθ**)



$$\frac{dN}{d\Omega}=\frac{(\rho o\acute{\eta}*dt)*d\sigma}{d\Omega}=\sigma\tau\alpha\theta.*\frac{d\sigma}{d\Omega}$$

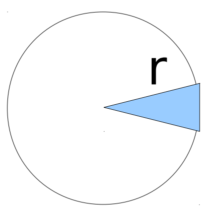
1. Μετράμε τον αριθμό σκεδαζόμενων σωματιδίων ανά μονάδα στερεάς γωνίας (dN/dΩ), και άρα το dσ/dΩ

2. Αν οι πυρήνες είναι σημειακοί, περιμένουμε από τη θεωρία:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\propto\frac{1}{\sin^4(\theta/2)}=\frac{1}{(1-cos\theta)^2}$$

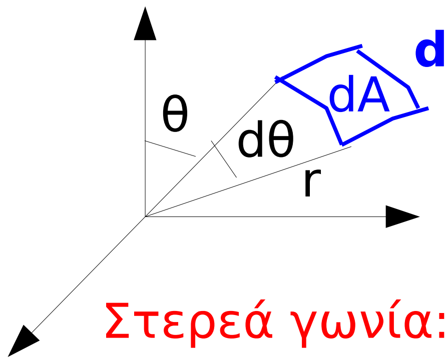
Πώς μοιάζει η ισοτροπική κατανομή σε 3 διαστάσεις; (1/2)

Π.χ. Ισότροπη κατανομή των προϊόντων = Isotropic distribution



$d\theta = ds/r$

(δισ-διάστατη) γωνία: θ



Στερεά γωνία: Ω

$d\Omega = dA/r^2 = (r*d\theta * r*\sin\theta*d\varphi) / r^2 = d\varphi * \sin\theta * d\theta$

→ αν δεν με ενδιαφέρει το φ, ολοκληρώνω και παίρνω 2π απ'αυτό:

$$d\Omega = 2\pi * \sin\theta * d\theta = 2\pi * d(\cos\theta)$$

$$(\text{ολική στερεά γωνία } \Omega_{tot} = 4\pi)$$

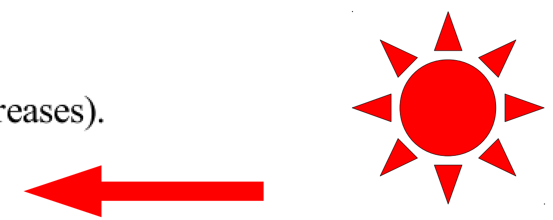
A two body decay is defined to be isotropic if the number of decaying particles per unit solid angle is constant. In other words:

$$\frac{dN}{d\Omega} = C \text{ where } \mathbf{C} \text{ is a constant}$$

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{dN}{d(\cos\theta)\, d\phi} = C \Rightarrow \frac{dN}{d\theta} = -2\pi C \sin\theta$$

(the minus sign coming from the fact that the cosine is increasing as the angel decreases).

Therefore the isotropic decay distribution is flat in $\cos\theta$ but not in θ .



Πώς μοιάζει η ισοτροπική κατανομή σε 3 διαστάσεις; (2/2)

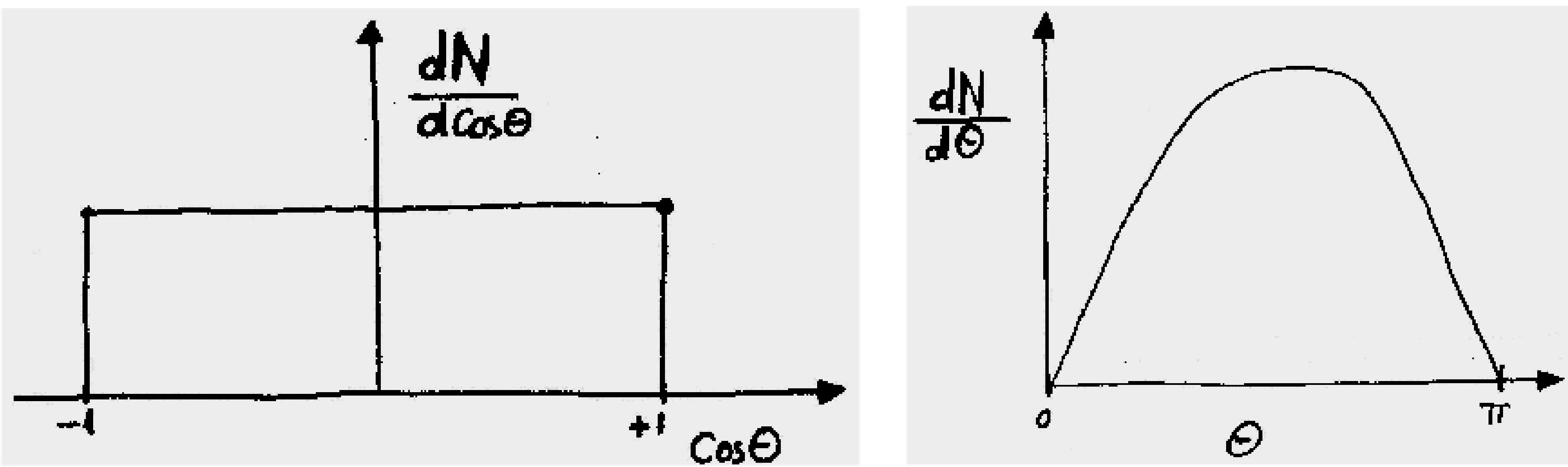


Figure 3: *The differential decay rate of events observed as a function of cosθ (left) where the distribution is flat and as a function of θ (right) where the distribution is not flat.*

Να θυμάστε λοιπόν:
Ισοτροπική κατανομή στον τρισ-δάστατο χώρο σημαίνει ίδια για όλες τις τιμές της **στερεάς γωνίας Ω,** δηλ. ανεξάρτητη του Ω
(και όχι της δισ-διάστατης γωνίας θ),
οπότε ανεξάρτητη του cosθ, και όχι ανεξάρτητη του θ

Σχετικιστική κινηματική:

$E = mc^2$ = η ενέργεια πού έχω επειδή απλά και μόνο έχω μάζα m

ενέργεια

μάζα

c = ταχύτητα του φωτός

$$\textit{γενικά, με κινητική ενέργεια } K\textit{, έχουμε: } E = K + mc^2$$

$$E = m\gamma c^2\textit{, όπου } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\textit{, και } \beta = \upsilon / c\textit{, με } \upsilon = \textit{ταχύτητα σωματιδίου}$$

$$p = m\gamma\upsilon = m\gamma\beta c\textit{, όπου } p = \textit{ορμή}$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

→ E [MeV], p [MeV/c], m [MeV/c^2]

Σημείωση: *με c = 1, γράφουμε :* $E^2 = p^2 + m^2$ *,κλπ.*

Μονάδες

$$c = 3\times 10^{8}\, m/s \equiv μονάδα\ ταχύτητας \equiv 1$$

$$μονάδα\ ενέργειας \equiv eV = 1.6*10^{-19}\, Cb*V = 1.6*10^{-19}\, Joule$$

Συνήθως χρησιμοποιούμε το MeV (= 10^{9} eV)

Σταθερά του Plank = **h** = 6.626 x 10^{-34} J s

$$\hbar c = 197\ MeV\ fm,\ όπου\ \hbar = \frac{h}{2\pi} \equiv μονάδα\ δράσης\left(ενέργειας \times χρόνου\right) \equiv 1$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}[mks] = \frac{e^2}{\hbar c}[cgs] = \frac{1}{137}$$

α = η σταθερά λεπής υφής = 1/137

Θα χρησιμοποιούμε παντού:
eV για ενέργεια (ή MeV στην πυρηνική**),**
1/4πε$_0$ = 1 σε όλους τους τύπους,
και θα βάζουμε:

$$e^2 = \alpha\, \hbar c,\ όπου\ \alpha = 1/137$$

$$\hbar c = 197\ MeV\ fm$$

Μετράμε:

Μάζα: MeV/c^2 (αφού E = mc^2)
Ορμή: MeV/c (αφού p = mγβc)
Χρόνο σε: 1/MeV (αφού η μονάδα δράσης = Ενέργεια * Χρόνος = 1)
Μήκος σε: μονάδες χρόνου = 1/MeV (αφού η μονάδα ταχύτητας=1)

1 amu = 1/12 μάζας ουδέτρου ατόμου ^{12}C = 931.5 MeV/c^2
Μάζα ηλεκτρονίου = 0.511 MeV/c^2
Μάζα πρωτονίου = 938.3 MeV/c^2, Μάζα νετρονίου = 939.6 MeV/c^2