

Επιταχυντές - Ανιχνευτές

Κ.Κορδάς

Ανιχνευτές : Μάθημα 4

Σπινθηριστές και καλοριμετρία - μέτρηση
ενέργειας σωματιδίου

Κώστας Κορδάς

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Επιταχυντές & Ανιχνευτές 8ου εξαμήνου, Α.Π.Θ

Τι θα συζητήσουμε

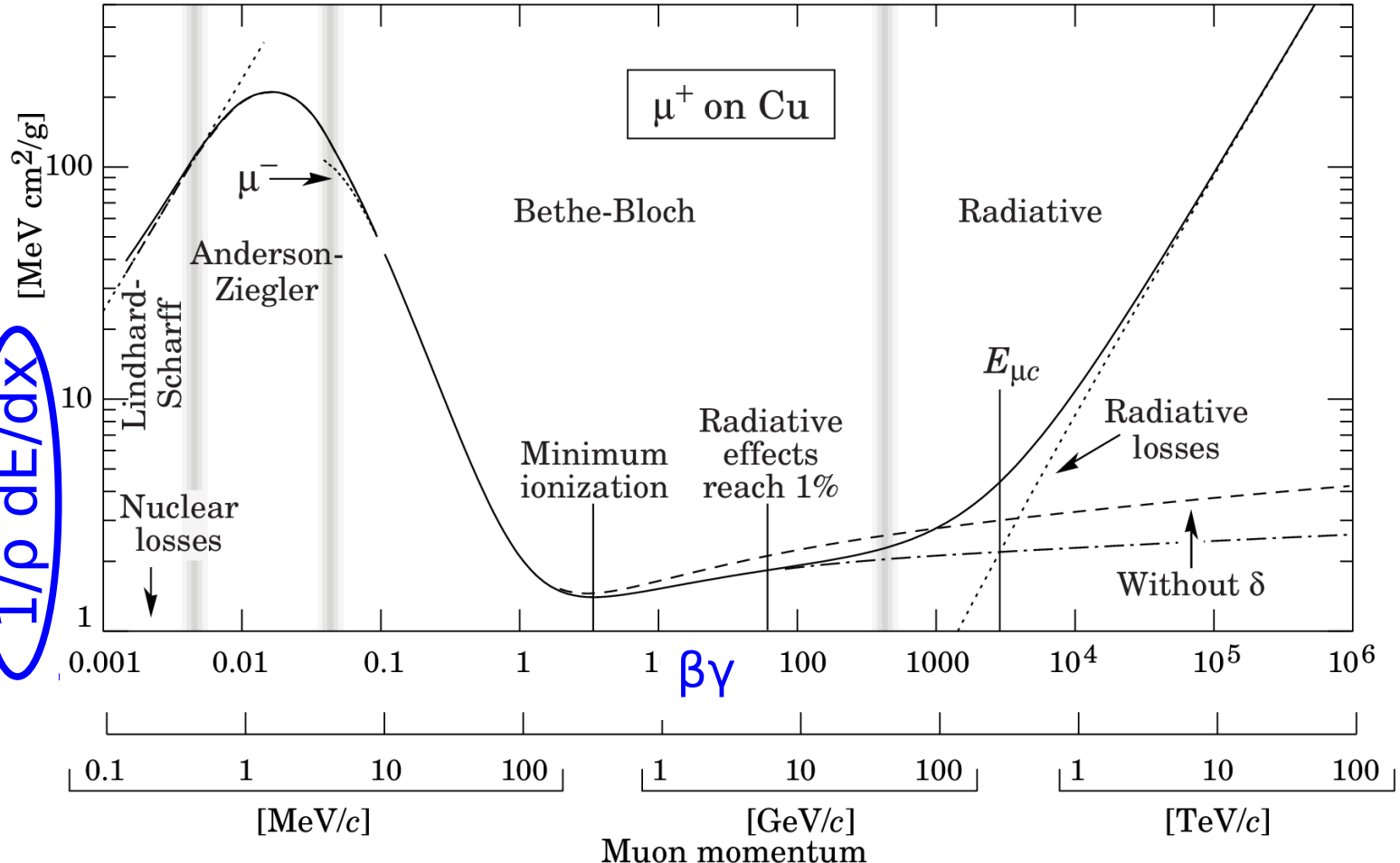
- Σπινθηριστές και φωτοπολλαπλασιαστές
- Καλοριμετρία
 - Ηλεκτροαγνητικά καλορίμετρα
 - Αδρονικά καλορίμετρα
- Μέτρηση ενέργειας
- Βιβλίο “Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics”, Stefaan Tavernier, 2010, κεφάλαιο 6.
- Άρθρο “Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics”, T. Virde, κεφάλαια 2, 4, 5.
- Βιβλίο Εργαστηρίου Πυρηνικής

1. Αλληλεπίδραση ακτινοβλίας με την ύλη

Φορτισμένο σωματίδιο χάνει ενέργεια διαπερνώντας την ύλη: specific Energy Loss ($1/\rho dE/dx$)

Για να υπολογίσουμε την απώλεια ενέργειας ανά μονάδα απόστασης (dE/dx , σε MeV/cm), πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $1/\rho dE/dx$ (σε $\text{MeV cm}^2/\text{g}$) με την πυκνότητα ρ του υλικού.

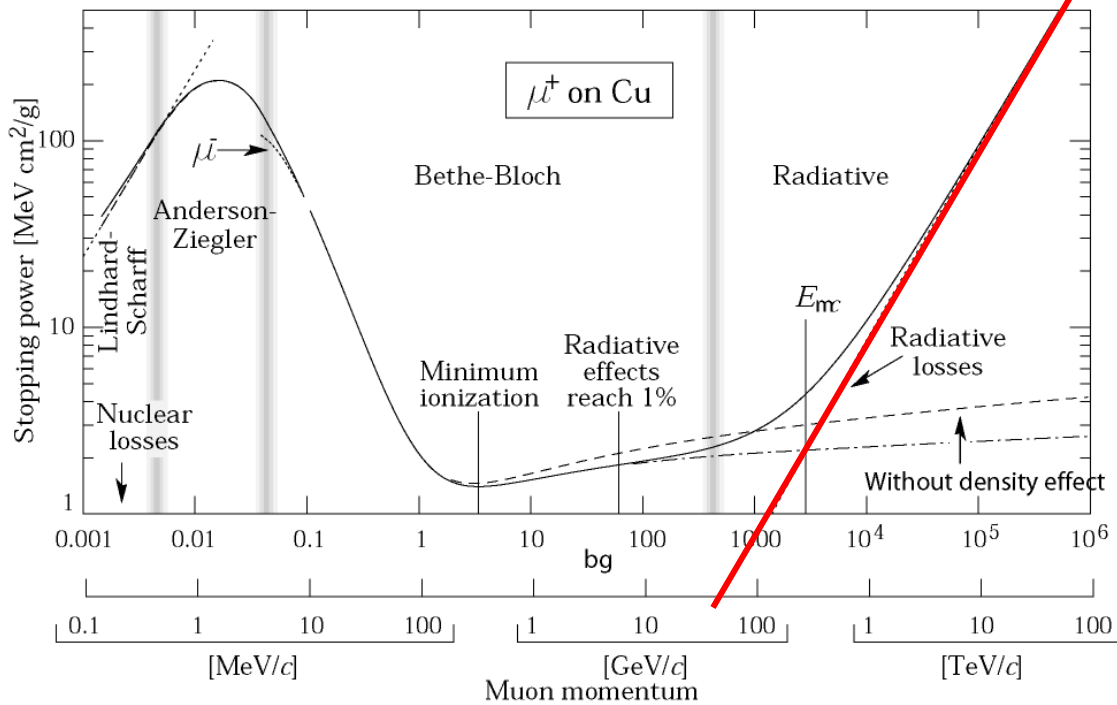
$1/\rho dE/dx$



Ένα σωματίδιο διασχίζει ένα υλικό με πυκνότητα ρ . Ανάλογα με την ορμή του, το σωματίδιο χάνει ενέργεια και με διαφορετικό μηχανισμό. Π.χ., στην περιοχή $\beta\gamma = [0.1 - 1000]$ (περιοχή Bethe-Bloch) έχουμε απώλειες με ιονισμό του υλικού. Από εκεί και πάνω, η απώλεια ενέργειας είναι κυρίως λόγω εκπομπής φωτονίων (δηλ., με radiation = Bremsstrahlung)

Όχι μόνο ιονισμοί αλλά, από κάποια ενέργεια και πάνω, και ακτινοβολία πέδησης (Bremsstrahlung)

such as copper to about 1% accuracy for energies between about 6 MeV and 6 GeV



Electron Momentum **5** **50** **500** **MeV/c**

Critical Energy (κριτική ενέργεια): όταν dE/dx (Ionization) = dE/dx (Bremsstrahlung)

Για μίονια, η ενέργεια αυτή (critical energy) είναι 400 GeV.

Για ηλεκτρόνια:

$$E_c = [800 \text{ MeV}] / (Z + 1.2)$$

- Μιον σε χαλκό σε $p \approx 400 \text{ GeV}$ φτάνει κριτική ενέργεια
- Electron σε χαλκό: σε $p \approx 20 \text{ MeV}$ φτάνει κριτική ενέργεια

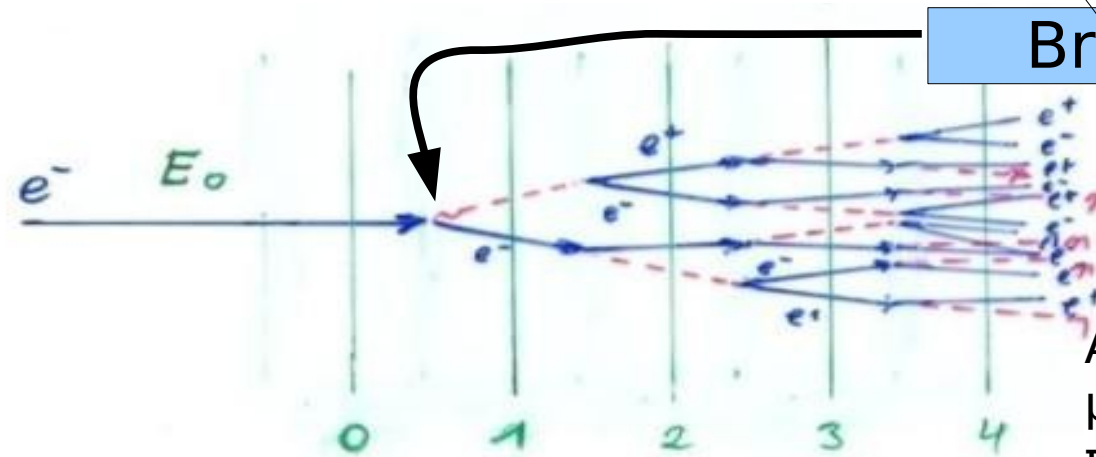
- Η EM Bremsstrahlung είναι ουσιαστική μόνο για τα ηλεκτρόνια (στις ενέργειες που έχουμε τώρα διαθέσιμες στους επιταχυντές).
- Μόνο τα ηλεκτρόνια κάνουν EM showers (επόμενη σελίδα)

Ηλεκτρόνια σε πυκνή ύλη - ακτινοβολία πέδησης (Brem) και Ηλεκτρομαγνητικός καταιγισμός (EM shower)

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0} \quad E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

X_0 = radiation length = average distance a high energy electron has to travel before reducing it's energy from E_0 to E_0/e by photon radiation.

In fact for Pb, $Z = 82$, $n = 3.3 \cdot 10^{28}$ nuclei/m³, $X_0 \approx 5.3$ mm which is close to the PDG [4] value of 5.6 mm. The radiation length can be approximated as $X_0 \approx \frac{180A}{Z^2} \text{ g.cm}^{-2}$ where A is the mass number



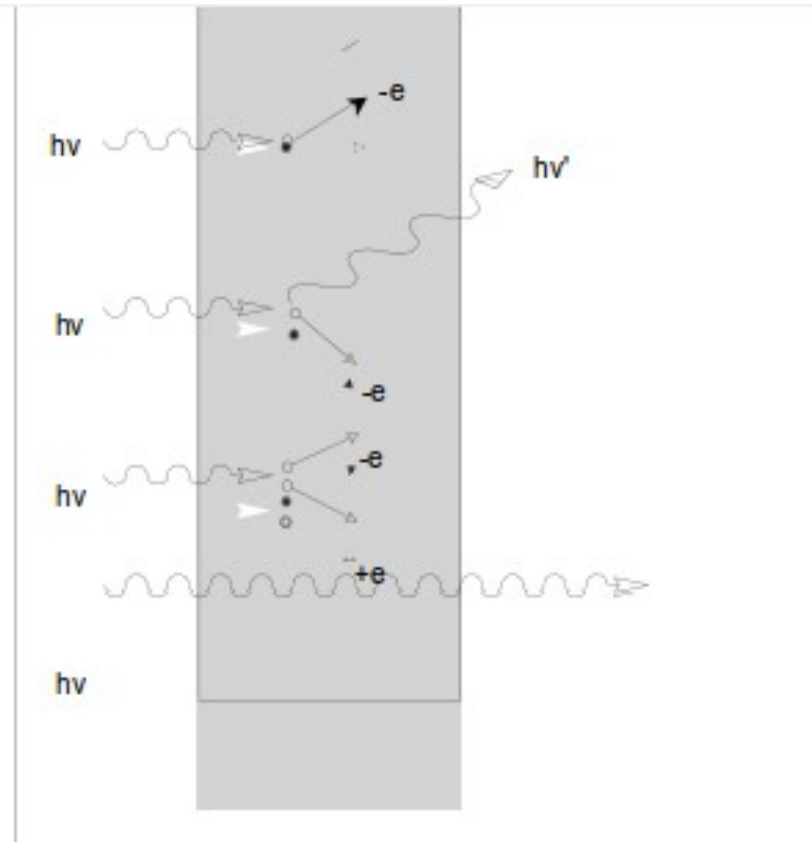
Bremsstrahlung

Electromagnetic Shower → EM calorimeter

Αποστάσεις σε μονάδες g/cm², είναι πολλαπλασιασμένες με την πυκνότητα ρ.
→ Σε cm: πρέπει να τις διαιρέσετε με το ρ

Αλληλεπίδραση φωτονίων με την ύλη

- Από το βιβλίο
Εργαστηρίου
Πυρηνικής Ι



Σχήμα 2.3.5 Οι 4 πιθανότερες περιπτώσεις έκβασης της πρόσπτωσης φωτονίων γ σε κάποιο υλικό, σχηματικά. Από πάνω προς τα κάτω:

- Το φωτόνιο αλληλεπιδρά με $\Phi\Phi$.
- Το φωτόνιο αλληλεπιδρά με ΦC .
- Το φωτόνιο αλληλεπιδρά με $\Delta\Gamma$ (αυτό μόνο αν $h\nu \geq 2m_0c^2$).
- Το φωτόνιο δεν αλληλεπιδρά καθόλου με το υλικό.

Αλληλεπίδραση φωτονίων με την ύλη

- Ποσοστό φωτονίων που διέρχονται χωρίς να αλληλεπιδράσουν = I/I_0

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad [8.1]$$

όπου I η ένταση της διερχόμενης δέσμης, I_0 η αρχική ένταση, μ ο συντελεστής απορρόφησης και x το πάχος του απορροφητή. Ο συντελεστής απορρόφησης εκφράζεται με δύο τρόπους:

- 1) γραμμικός συντελεστής απορρόφησης, σε μονάδες αντιστρόφου μήκους, πχ. cm^{-1}
- 2) μαζικός συντελεστής απορρόφησης, σε μονάδες επιφάνειας δια μάζα, πχ. cm^2/gr . Ο συντελεστής αυτός προκύπτει από διαίρεση του γραμμικού συντελεστού απορρόφησης με την πυκνότητα του απορροφητή.

Έτσι, ο συντελεστής απορρόφησης είναι ένα μέτρο της αλληλεπίδρασης των φωτονίων με την ύλη:

Μεγάλος συντελεστής απορρόφησης $\mu \rightarrow$ μεγάλη πιθανότητα αλληλεπίδρασης

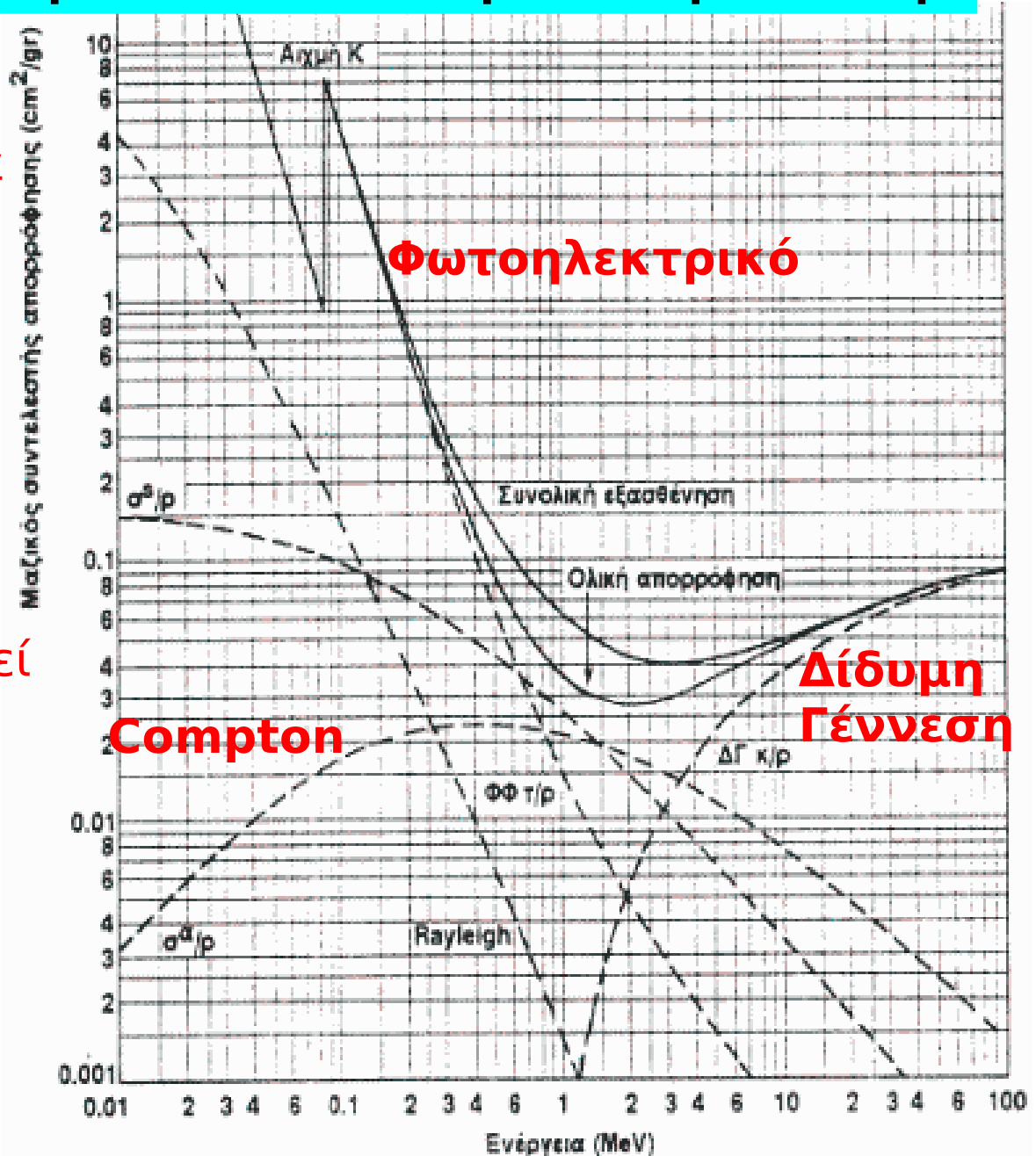
Αλληλεπίδραση φωτονίων με την ύλη

Συντελεστής απορρόφησης μ :
Μεγάλο $\mu \rightarrow$ μεγάλη πιθανότητα αλληλεπίδρασης

Το κάθε είδος αλληλεπίδρασης έχει διαφορετική πιθανότητα να συμβεί, ανάλογα με την ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου.

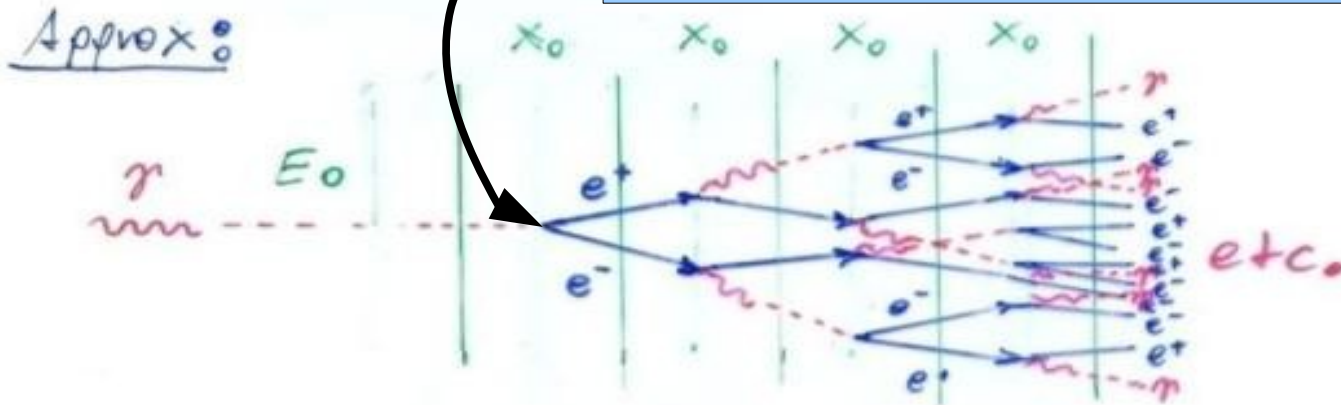
Ανάλογα την ενέργεια, κυριαρχεί ο ένας ή ο άλλος τρόπος:

- $E < 0.8 \text{ MeV}$: κυριαρχεί το φωτοηλεκτρικό
- $E: 0.8 - 3 \text{ MeV}$:
 - το Compton
- $E > 3 \text{ MeV}$: η δίδυμη γέννηση

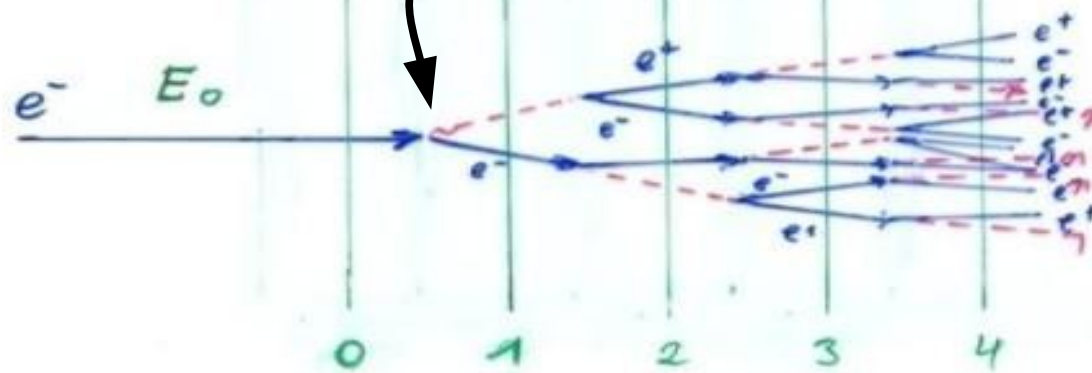


Υψηλής ενέργειας ηλεκτρόνια και φωτόνια σε “πυκνή ύλη” - EM shower

Pair production (δίδυμη γένεση)



Bremsstrahlung



Electromagnetic Shower \rightarrow EM Calorimeter

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0}$$

$$E(x) = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

$$X_0(\gamma) = \frac{9}{7} X_0(e), \text{ όπου } X_0 \equiv X_0(e)$$

2. Σπινθηριστές

Σπινθηροστές

- Φορτισμένο σωματίδιο μέσα από υλικό :
 - Χάνει ενέργεια με ιονισμούς και διεγέρσεις.
 - Στα αέρια είναι εύκολο να συλλέξουμε τα παραγόμενα φορτία στην άνοδο
 - Στα στερεά είναι πιά δύσκολο να τα συλλέξουμε
 - Υπάρχουν οι ημιαγωγοί που γίνονται πολύ λεπτοί και τα καταφέρνουμε.

Σπινθηροστές (Scintillators)

- Σπινθηριστές:
 - Αποφεύγουμε το πρόβλημα συλλογής των φορτίων από ιονισμούς: αρκεί τα φορτία αυτά να φτάσουν σε άτομα-προσμίξεις (“κέντρα ενεργοποίησης”), λίγα άτομα παραπέρα από το σημείο του ιονισμού. Οι προσμίξεις λειτουργούν ως κέντρα φωσφορισμού και δίνουν φωτόνια μικρής ενέργειας.
 - Έτσι, κατά κάποιον τρόπο ο σπινθηριστής είναι μια μηχανή που μετατρέπει την ενέργεια που εναποθέτει το διασχίζων φορτισμένο σωματίο σε “ψιλιά” φωτόνια, ~ 3 eV το καθένα (στο οπτικό φάσμα).
 - Αν ο σπινθηριστής είναι διαφανής σ'αυτά τα “ψιλιά” φωτόνια του ορατού, τότε έχουμε απλά να τα συλλέξουμε και να τα ανιχνεύσουμε.
- Μα, φωτόνια εκπέμπονται και με Cerenkov, γιατί να θέλουμε σπινθηριστές;
 - Γιατί η ένταση της ακτονοβολίας Cerenkov είναι ~ 100 φορές μικρότερη από ότι σε έναν καλό σπινθηριστή

Κλασικός πλαστικός σπινθηριστής (Knowaglass SCSN-32)

Plastic type	Polystyrene-based scintillator	
Light yield	8,000 photons/MeV, i.e. $\approx 16,000$ photons/cm for minimum ionising particles	
Decay time	3.6 ns	
Emission wavelength	423 nm	← πολύ γρήγορος, καλός για μέτρηση χρόνου άφιξης σωματιδίων
Light attenuation length at 423 nm	250 cm	
Optical refractive index	1.58	
Density	1.08	
Radiation length	30 cm	

Πίνακας 6.1, σελ. 169, από το βιβλίο

“Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics”, Stefaan Tavernier, 2010

Παράδειγμα όπου μια απλή διαίρεση δεν αρκεί:

Ελάχιστο ιονιστικό σωματίδιο: $1/\rho \, dE/dx \sim 2 \text{ (MeV/cm)/(g/cm}^3\text{)}$

Για $\rho = 1.08 \text{ g/cm}^3 \rightarrow dE/dx \sim 2 \text{ MeV/cm}$

Για $\lambda = 423 \text{ nm} \rightarrow E(\text{φωτονίου}) \sim 3 \text{ eV}$ (υπολογίστε το με $\hbar c = 200 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$)

→ Αν όλη η ενέργεια πήγαινε σε φωτόνια, θα έπρεπε να είχαμε 650k φωτόνια...

Αλλά έχουμε παραγωγή $\sim 8\text{k}$ φωτονίων (→ “**light yield**”, απόδοση σε φως)

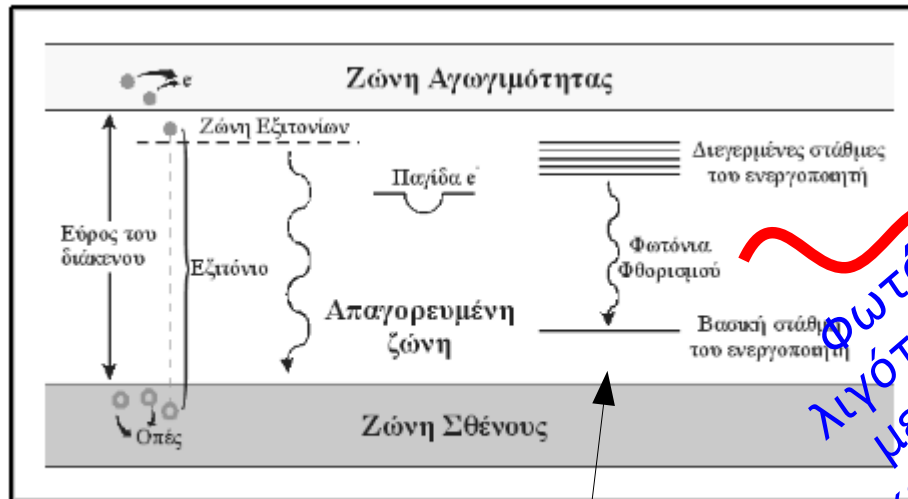
→ Γιατί ο υπολογισμός δεν είναι σωστός; Γιατί το σύστημα είναι κβαντικό!

Ενεργειακές στάθμες, κλπ, δείτε επόμενη σελίδα!

→ Πόσο μακριά μπορούν να διαδοθούν αυτά τα φωτόνια πριν απορροφηθούν;

“**Attenuation length**”: η απόσταση που θα έχουν πείνει το $1/e$ από αυτά.

Σπινθηριστές → διάφανοι σε φωτόνια του ορατού



Σχήμα 6.4 Ενεργειακό διάγραμμα κρυσταλλικού σπινθηριστή σύμφωνα με την θεωρία ζωνών.

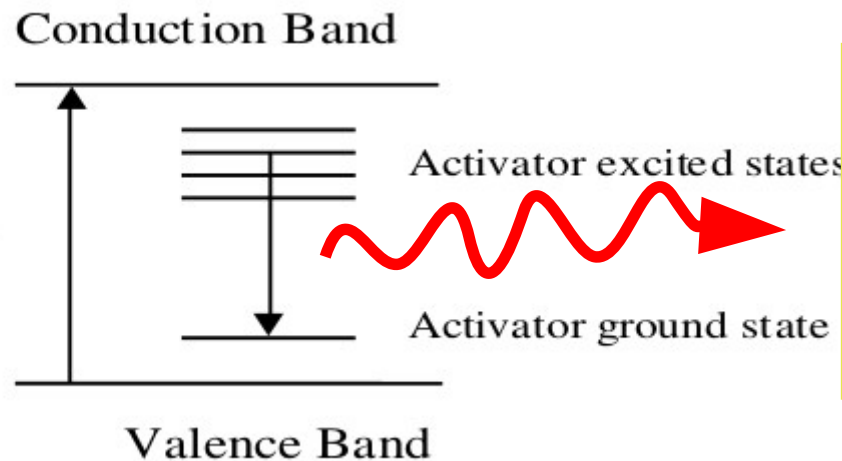
Κέντρα ενεργοποίησης (= προσμίξεις) αλλάζουν τις ενεργειακές στάθμες τοπικά
 Σημ: Αν το υλικό είναι καθαρό τότε το εκπεμόμενο φωτόνιο έχει όση ενέργεια χρειάζεται για να απορροφάται πάλι...

Μέγιστος αριθμός φωτονίων στο ορατό που παράγονται σ' έναν σπινθηριστή:

$$N_{max} = \frac{1}{b} \frac{E_{\gamma} (\text{προσπίτων})}{E_{gap}}$$

με $b = 2-3$
 → $1/b = 35-50\%$ της προσπίτουσας ενέργειας πηγαίνει στο να "ανεβάσει" ηλεκτρόνιο στη Ζώνη Αγωγιμότητας (το υπόλοιπο σε θερμική ενέργεια στο πλέγμα: φωνόνια)

Μετά, πρέπει αυτό το ηλεκτρόνιο να καταλήξει σε πρόσμιξη ("κέντρο ενεργοποίησης") που θα δώσει εκπομπή φωτονίου στο ορατό



Τέτοια φωτόνια δεν απορροφούνται πάλι
 → το υλικό είναι διάφανο σε τέτοια φωτόνια

Διάφοροι σπινθηριστές

Name*	Density	Emission λ [nm]	Light yield [photons/MeV]	Decay time τ [ns]	Radiation length [cm]
NaI:Tl	3.67	410	40,000	230	2.59
BGO	7.14	480	4000	300	1.12
BaF ₂ (fast)	4.88	215	1500	<1	2.05
BaF ₂ (slow)	4.88	310	10,000	700	2.05
CsI:Tl	4.51	565	65,000	600	1.68
CsF	4.11	390	2000	3	
PbWO ₄	8.28	480	200	10	0.89
LSO:Ce	7.4	420	28,000	40	1.14
LuAP:Ce	8.3	360	10,000	18	
GSO:Ce	6.71	440	7500	60	1.38
LuPO ₄	6.6	360	13,000	24	
YAP:Ce	5.37	370	16,000	25	2.7
LaBr:Ce	5.3	360	60,000	35	2.13

*The short names for the scintillators stand for the following chemical compounds: BGO = Bi₄Ge₃O₁₂, GSO = Gd₂SiO₅, LSO = Lu₂SiO₅, LuAP = LuAlO₃, YAP = YAlO₃

Πίνακας 6.2, απο το βιβλίο “Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics”,
Stefaan Tavernier, 2010

πχ., για το CsI:Tl $E_{gap} = 6.2 \text{ eV}$
 * για 1 MeV προσπίπτων φωτόνιο
 * με $b=2$
 → $N_{max} = 80,000$ φωτόνια/MeV
 * Βλέπουμε 65,000 φωτόνια!
 → **εξαιρετικό light yield**

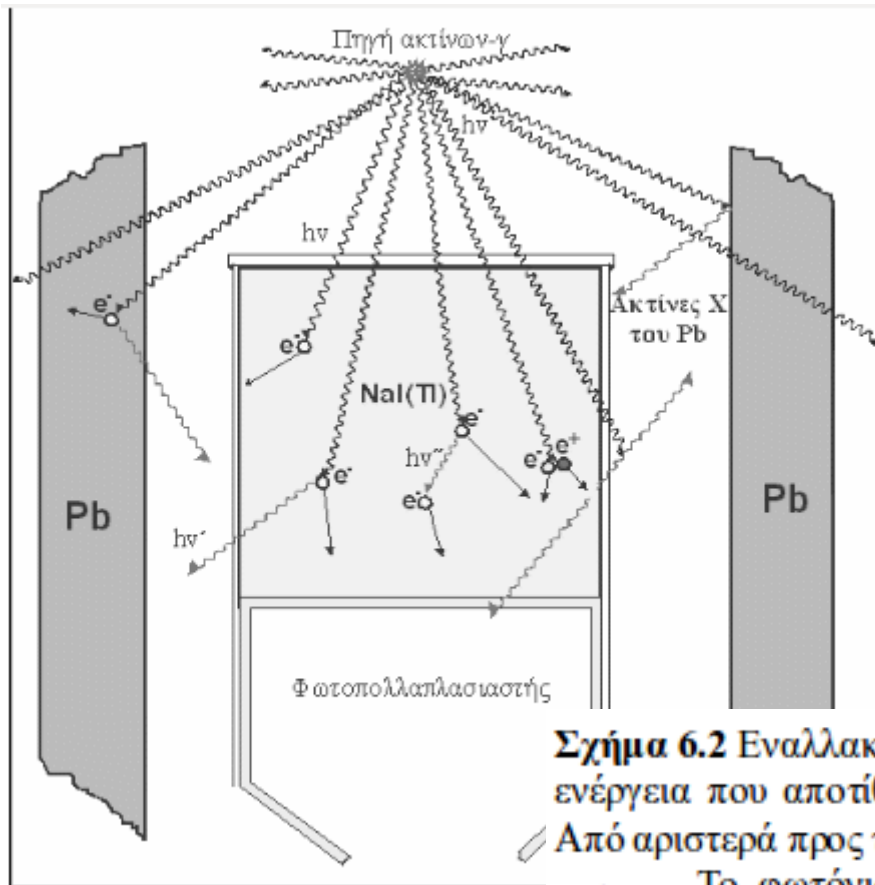
Διάφοροι σπινθηριστές

Table 3: Properties of various scintillating crystals.

Crystal		NaI(Tl)	CsI(Tl)	CsI	BaF ₂	BGO	CeF ₃	PbWO ₄
Density	g.cm ⁻²	3.67	4.51	4.51	4.89	7.13	6.16	8.28
Rad. length	cm	2.59	1.85	1.85	2.06	1.12	1.68	0.89
Molière radius	cm	4.5	3.8	3.8	3.4	2.4	2.6	2.2
Int. length	cm	41.4	36.5	36.5	29.9	22.0	25.9	22.4
Decay Time	ns	250	1000	35	630	300	10-30	<20>
				6	0.9			
Peak emission	nm	410	565	420	300	480	310- 340	425
				310	220			
Rel. Light Yield	%	100	45	5.6	21	9	10	0.7
				2.3	2.7			
d(LY)/dT	%/°C	≈ 0	0.3	- 0.6	- 2.0	- 1.6	0.15	-1.9
Refractive Index		1.85	1.80	1.80	1.56	2.20	1.68	2.16

Πίνακας 3, απο το άρθρο “Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics”, T .Virde

Φωτόνια σε σπινθηριστή



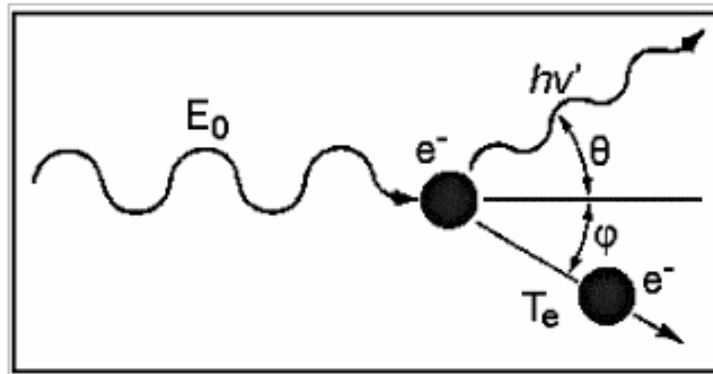
Σχήμα 6.2 Εναλλακτικοί τρόποι αλληλεπίδρασης φωτονίου με τον κρύσταλλο NaI(Tl) και η ενέργεια που αποτίθεται αντίστοιχα από μονοενεργειακή πηγή ακτίνων-γ με ενέργεια E_0 .

Από αριστερά προς τα δεξιά:

- Το φωτόνιο αλληλεπιδρά με φωτοηλεκτρικό φαινόμενο (ΦΦ). Η συλλεγόμενη ενέργεια είναι περίπου $E_0 = h\nu$.
- Το φωτόνιο αλληλεπιδρά με φαινόμενο Compton (ΦC) και το φωτόνιο Compton διαφεύγει από τον σπινθηριστή. Η συλλεγόμενη ενέργεια είναι $E_e < E_0$.
- Το φωτόνιο αλληλεπιδρά με ΦC και το φωτόνιο Compton απορροφάται από τον σπινθηριστή, π.χ. με ΦΦ. Η συλλεγόμενη ενέργεια είναι E_0 .
- Το φωτόνιο αλληλεπιδρά με δίδυμη γένεση (μόνον αν $E_0 > 1.022$ MeV). Τα παραγόμενα ηλεκτρόνιο και ποζιτρόνιο αφήνουν το σύνολο της ιονιστικής τους ενέργειας στον σπινθηριστή, αλλά τα φωτόνια εξαύλωσης του ποζιτρονίου διαφεύγουν. Η συλλεγόμενη ενέργεια θα είναι ίση με $E_0 - 1.02$ MeV. Δεν αποκλείεται φυσικά να απορροφηθεί είτε ένα είτε και τα δύο φωτόνια εξαύλωσης.

$$h\nu = h\nu' + T_e$$

Compton



Σχήμα 2.3.2 Διάγραμμα φαινομένου Compton.

Το **πιο πιθανό** είναι το ηλεκτρόνιο από Compton να έχει τη μέγιστη επιτρεπτή ενέργεια

$$h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}$$

όπου $\alpha = h\nu/m_0c^2 = h\nu/511\text{keV}$.

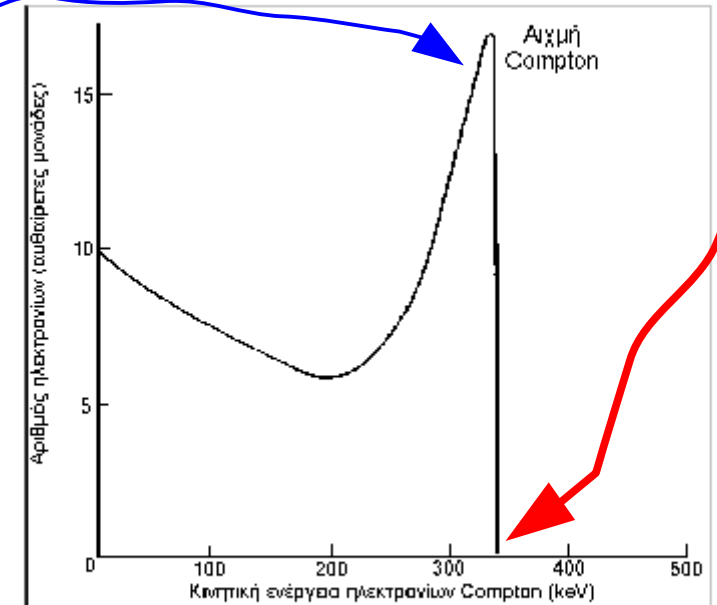
Όταν η γωνία σκέδασης θ γίνει μέγιστη ($\theta = 180^\circ$), το σκεδαζόμενο φωτόνιο παίρνει την ελάχιστη δυνατή ενέργεια:

$$(h\nu')_{\min} = \frac{h\nu}{1 + 2\alpha} \quad [2.3.4]$$

Το ηλεκτρόνιο Compton στην περίπτωση αυτή έχει, προφανώς, τη μέγιστη ενέργεια:

$$(T_e)_{\max} = h\nu - \frac{h\nu}{1 + 2\alpha} \quad [2.3.5]$$

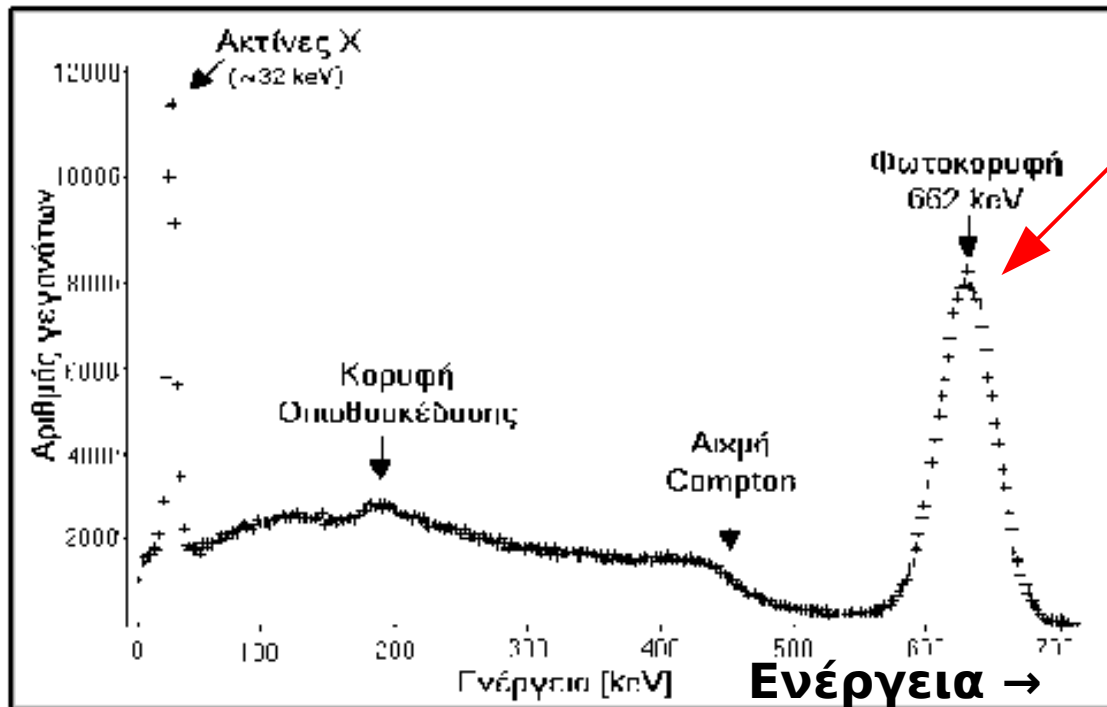
$$T_{e(\max)} = 511 - \frac{511}{1 + 2 \cdot 1} = 340.7\text{keV}$$



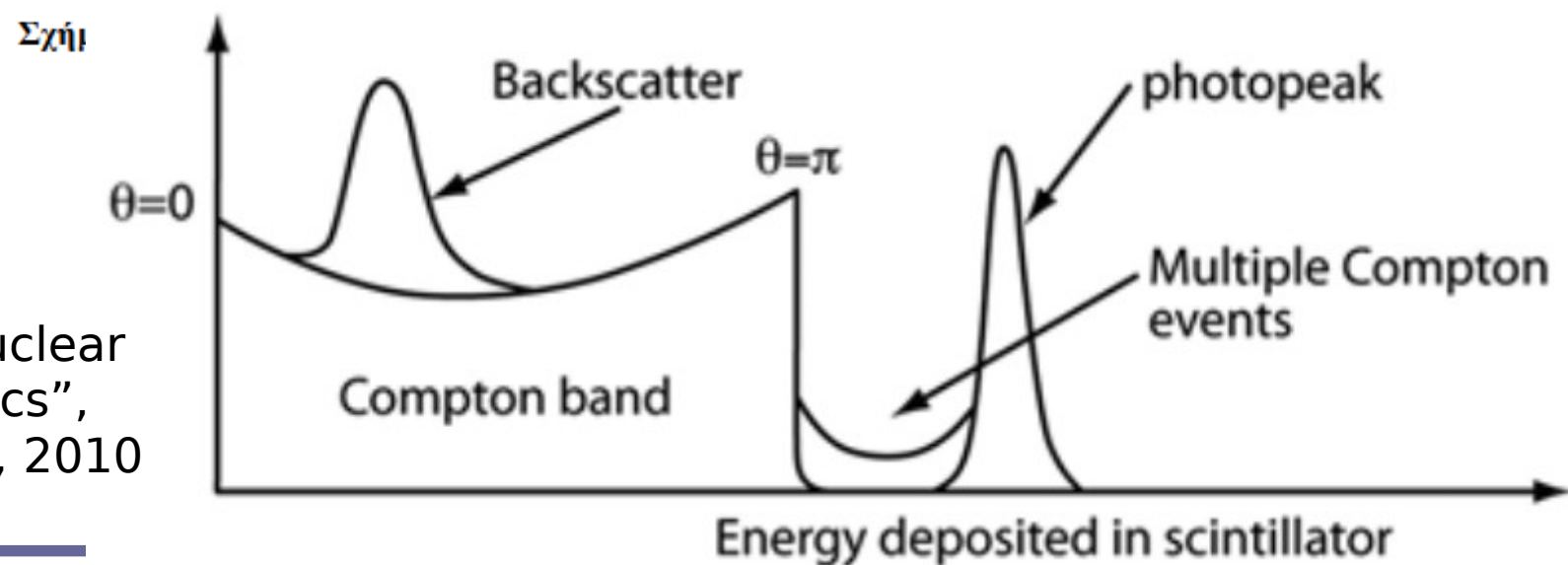
Σχήμα 2.3.4 Η ενεργειακή κατανομή των ηλεκτρονίων Compton που παράγονται από μονοενεργειακή πηγή γ ενέργειας $E_0 = 511\text{keV}$.

Φωτόνια σε σπινθηριστή, όπως έχουμε δει στο Εργαστήριο Πυρηνικής, 6ου εξαμήνου

Απαριθμήσεις όπου μετρήθηκε η ενέργεια \uparrow



Φωτοκορυφή αντιστοιχεί στις περιπτώσεις που έχουμε τη μέγιστη δυνατή εναποτιθέμενη ενέργεια (δεν έχουμε διαφεύγοντα φωτόνια από τον σπινθηριστή)



απο το βιβλίο “Experimental Technniques in Nuclear And Particle Physics”, Stefaan Tavernier, 2010

Συλλογή φωτονίων από σπινθηριστή

Απο το βιβλίο “Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics”,
Stefaan Tavernier, 2010

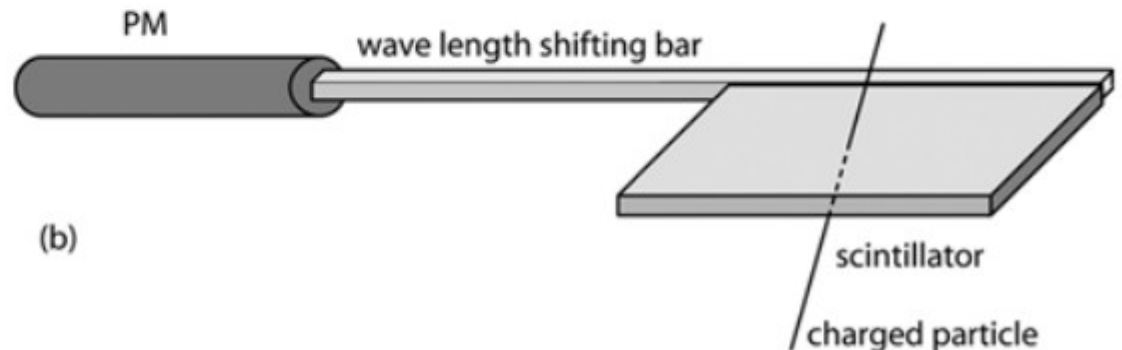
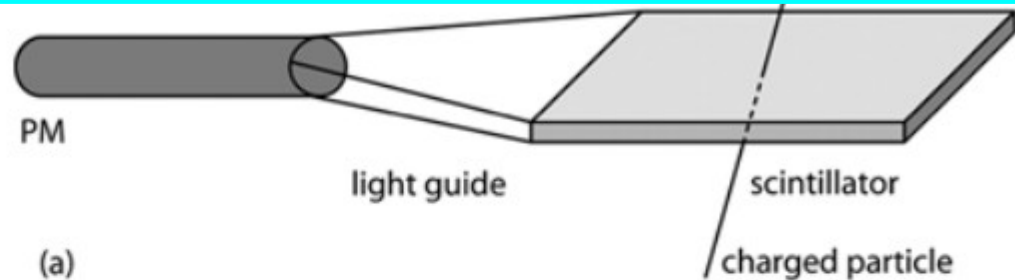


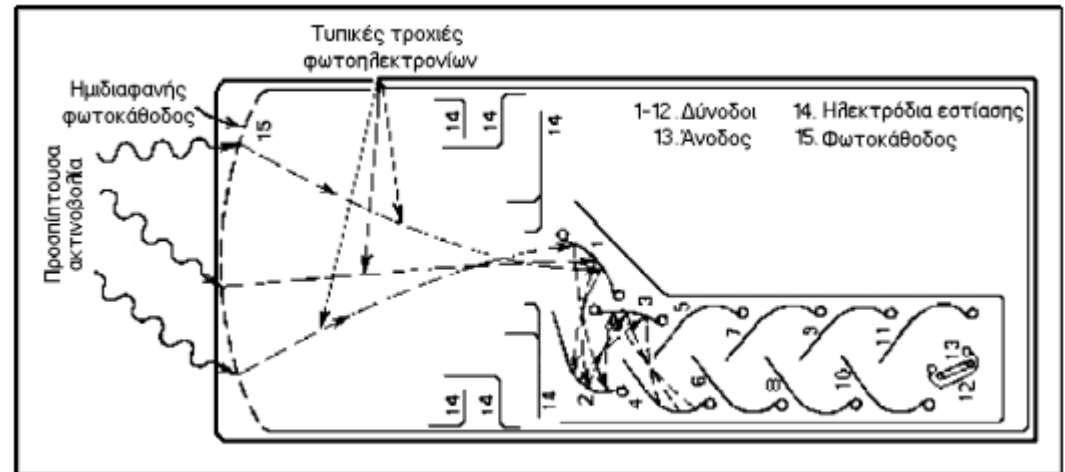
Fig. 6.1 (a) Plastic scintillator assembly as detector for charged particles with light guide readout. (b) Same with wavelength shifter readout

Κλασική διάταξη με πλαστικό σπινθηριστή:

- Φορτισμένο σωματίο εναποθέτει ενέργεια → μετατροπή σε φωτόνια ορατού
- Ο σπινθηριστής είναι διαφανής σε τέτοια φωτόνια → με ανακλάσεις στην άκρη του (~10% των φωτονίων φθορισμού φτάνουν στην άκρη για συλλογή)
- “οδηγούνται” με “light guide” σε έναν “φωτοπολλαπλασιαστή” και
- εκεί “πολλαπλασιάζονται” σε πολλά ηλεκτρόνια, και
- ανιχνεύουμε το ρεύμα τους ως πτώση τάσης σε κάποια αντίσταση.

Φωτοπολλαπλασιαστής = PMT (πρώτος: Zwoykin 1936)

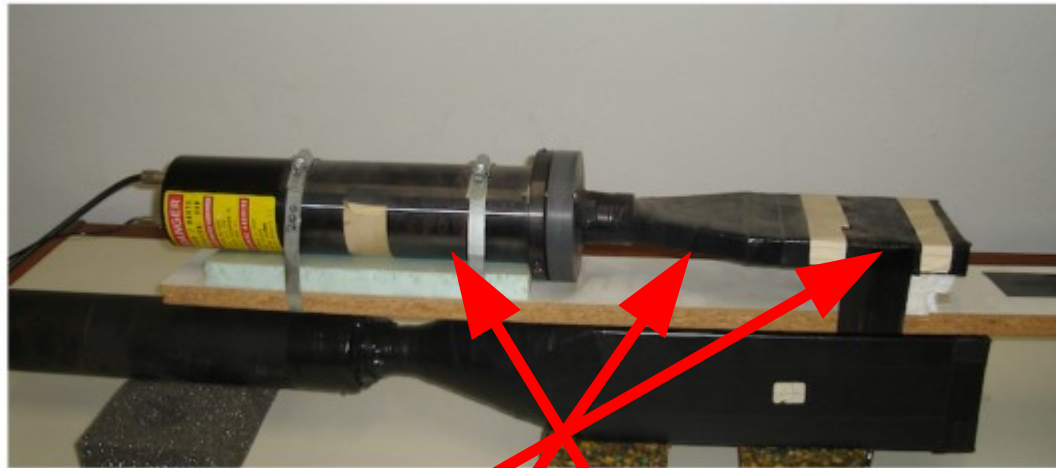
- Κάθε φωτόνιο του οπτικού πέφτει στη φωτοκάθοδο στο παράθυρο του PMT και κάνει φωτοηλεκτρικό: **κβαντική απόδοση, ϵ** (max για το υλικό K_2CsSb : 25-30 % @ 400nm)
- Από δύνοδο σε δύνοδο μέσα στον PMT: 150-200 V διαφορά δυναμικού, **“πολλαπλασιαστικός παράγοντας”, d** , σε κάθε δύνοδο: max. ~ 25 **δευτερογενή ηλεκτρόνια** για 200 V.
- Για κάθε φωτοηλεκτρόνιο που παράγεται στη φωτοκάθοδο, ο ολικός πολλαπλασιαστικός παράγοντας ηλεκτρονίων στην άνοδο στο τέλος, είναι **“Gain” = “M” = d^N**
με διασπορά $(\sigma_M/M)^2 = 1/(d-1)$



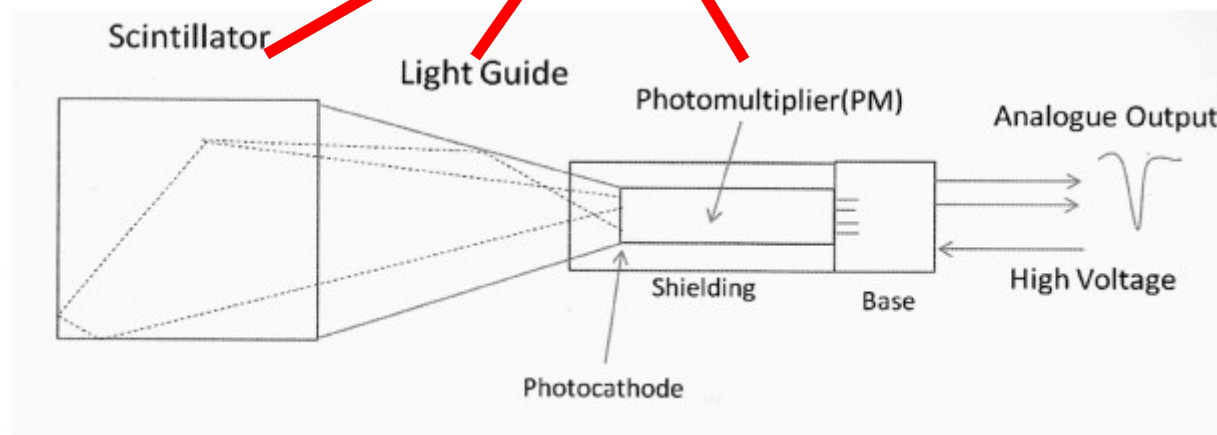
Σχήμα 6.6 Διάγραμμα φωτοπολλαπλασιαστή.

Σπινθηριστής + Φωτοπολλαπλασιαστής

- Διάταξη με σπινθηριστή και φωτοπολλαπλασιαστή (στο Εργαστήριο Πυρηνικής II):



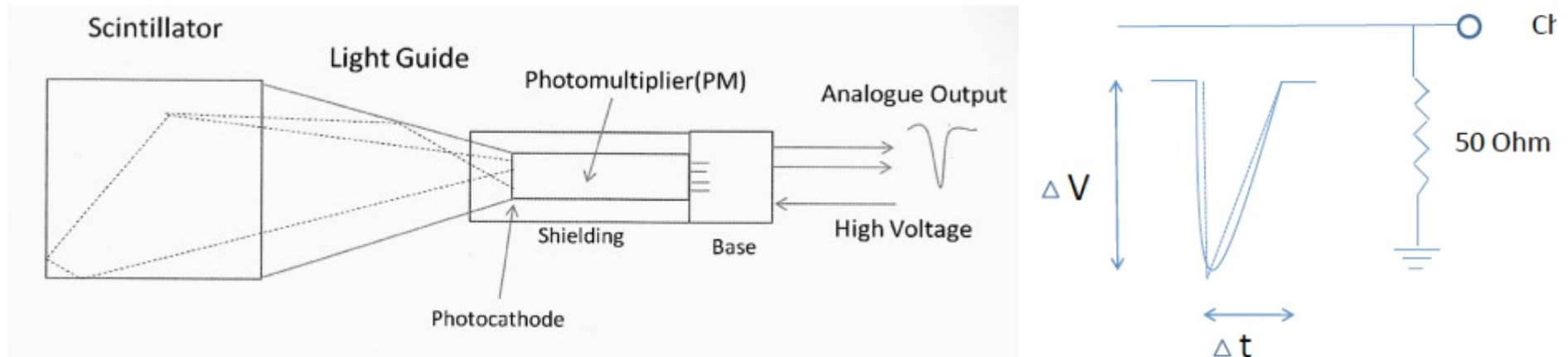
Εικόνα 1: Οι δύο απαριθμητές σπινθηρισμών της άσκησης



Σχήμα 1 : Σύστημα απαριθμητή σπινθηρισμών.

Σήμα: ανάλογο της Ενέργειας

- Το μέγιστο σήμα (από τη φωτοκορυφή) είναι ανάλογο της ενέργειας που εναποτίθεται στον σπινθηριστή:
 - Πέρασμα σωματιδίου και εναπόθεση ενέργειας στον σπινθηριστή → παραγωγή φωτονίων στο οπτικό → φωτοηλεκτρόνια στη φωτοκάθοδο του PMT → πολλαπλασιασμός τους και ρεύμα από την άνοδο του PMT → μέτρηση της πτώσης τάσης από τη ροή του ρεύματος πάνω σε μια αντίσταση (τυπικά 50 Ω).
 - Ύψος τελικού παλμού ανάλογο της ενέργειας που εναποτέθηκε



Σχήμα 1 : Σύστημα απαριθμητή σπινθηρισμών.

- **Βαθμονόμηση της διάταξης = εύρεση της σχέσης σήματος-ενέργειας:** η απόκριση σε γνωστές ενέργειες μας δίνει τη σχέση σήματος-ενέργειας (όπως στο εργαστήριο Πυρηνικής του δου εξαμήνου: είναι απλά **μια σταθερά**)

Σφάλμα: ανάλογο της ρίζας της Ενέργειας

Για να ξεχωρίσουμε αν το παρατηρούμενο σήμα αντιστοιχεί στην τάδε ή την δείνα εναπόθεση ενέργειας, πρέπει να έχουμε διακριτές φωτοκορυφές
→ πρέπει η διάταξη να έχει καλή διακριτική ικανότητα (resolution)

- Αν **Ne** είναι ο αριθμός φωτοηλεκτρονίων που παράγονται από εναπόθεση ενέργειας E , με σταθερό πολλαπλασιαστικό παράγοντα στον PMT έχουμε:

$$\text{Σήμα} = \text{σταθερά} * Ne = k * E \rightarrow E = \text{const} * Ne \rightarrow \sigma(E) = \text{const} * \sigma(Ne) = \text{const} * \sqrt{Ne}$$

θεωρώντας ότι η παραγωγή των φωτοηλεκτρονίων ακολουθεί στατιστική Poisson (θα παραχθεί ή όχι με κάποια πιθανότητα, πχ με την κβαντική απόδοση του υλικού της φωτοκαθόδου), οπότε:

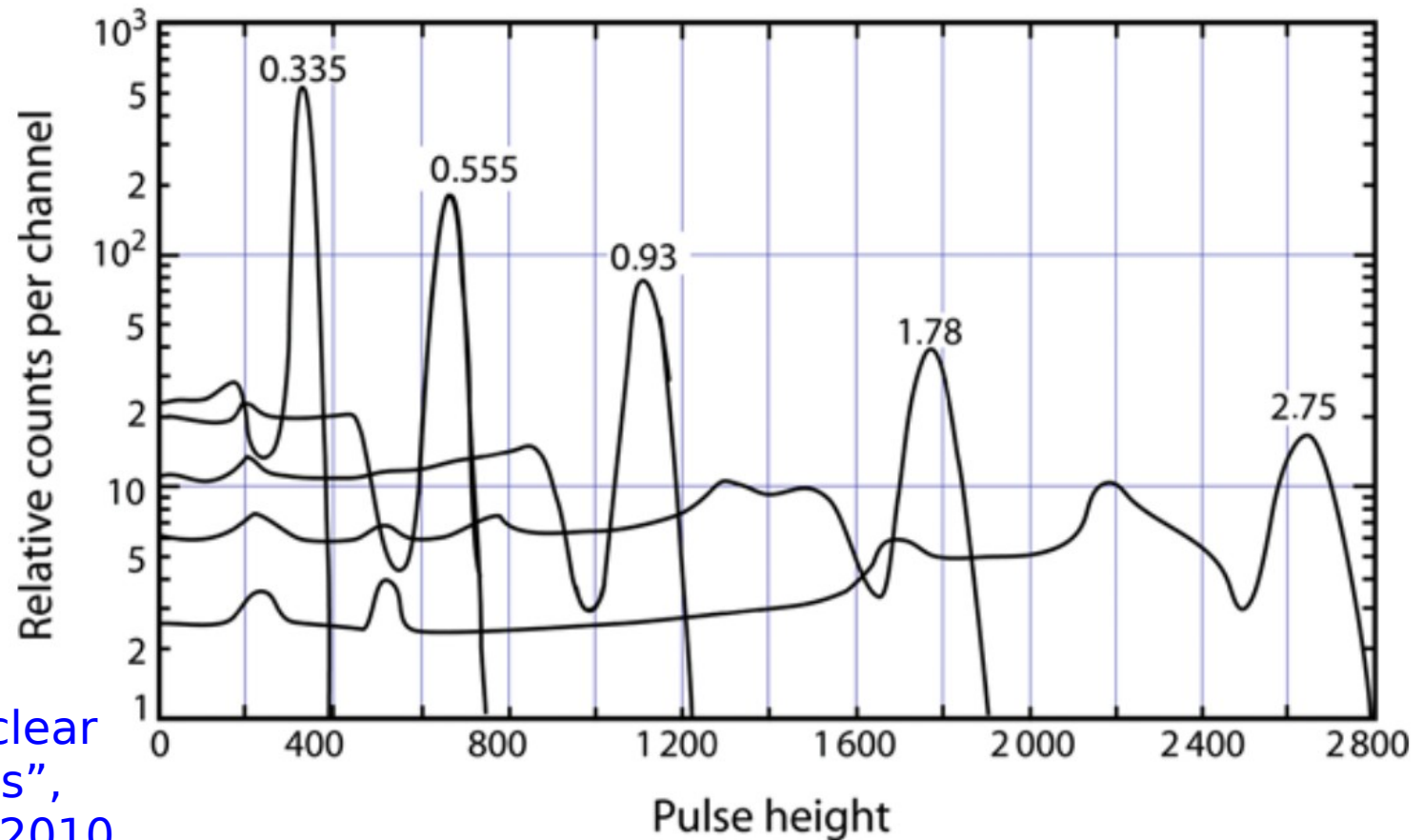
- Έτσι, το **σχετικό σφάλμα στη μέτρηση της ενέργειας**, που το ονομάζουμε και διακριτική ικανότητα (resolution) είναι:

$$\sigma/E \sim \text{sqrt}(Ne)/Ne \sim 1/\text{sqrt}(Ne) \sim \text{sqrt}(W/E) \sim \mathbf{1/\text{sqrt}(E)}$$

όπου W = η ενέργεια για την παραγωγή ενός φωτοηλεκτρονίου = $1 \text{ MeV} / \epsilon$, με ϵ = αριθμός φωτοηλεκτρονίων ανά MeV εναποτιθέμενης ενέργειας

Π.χ., βλ. σελ. 21, 22 των διαφανειών, όπου πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας, τόσο την απόδοση συλλογής των οπτικών φωτονίων του σπινθηριστή, όσο και την κβαντική απόδοση για την παραγωγή φωτοηλεκτρονίων από αυτά τα φωτόνια που φτάνουν στον PMT

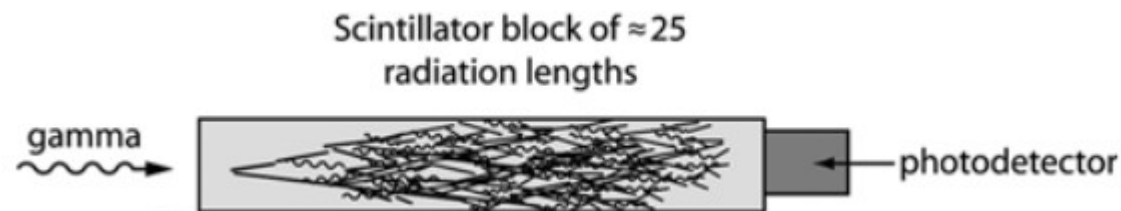
Διακριτική ικανότητα διάταξης



απο το βιβλίο
“Experimental
Techniques in Nuclear
And Particle Physics”,
Stefaan Tavernier, 2010

Fig. 6.19 Response of a cylindrical NaI:Tl crystal measuring 7.62×7.62 cm exposed to mono-energetic gamma rays of different energies between 335 keV and 2.75 MeV. Figure adapted from *R.L.Heath, “Scintillation spectroscopy gamma-ray spectrum catalogue”, IDO-16880, 1 & 2 (1964).*

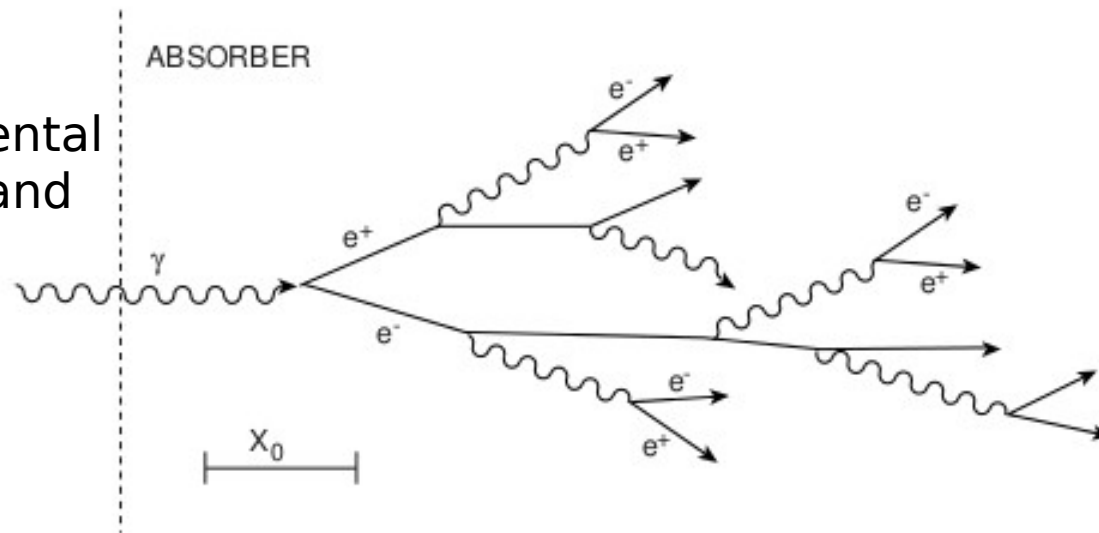
3. Μέτρηση της ενέργειας με ηλεκτρομαγνητικούς και αδρονικούς καταγισμούς



Ανάπτυξη ΗΜ καταίγισμού (EM shower)

- Ένα υψηλής ενέργειας ηλεκτρόνιο ή φωτόνιο που προσπίπτει σε πυκνό υλικό προκαλεί έναν **ηλεκτρομαγνητικό καταίγισμό (EM shower)** από **δευτερογενή ηλεκτρόνια και φωτόνια** μέσω ακτινοβολίας πέδησης (Bremsstrahlung) και δίδυμης γένεσης (pair production). Δές στο σχήμα:

Απο το άρθρο “Experimental Techniques in Nuclear and Particle Physics”,
Tejinder Virdee, 2010



- Όσο αναπτύσσεται ο καταίγισμός, ο αριθμός δευτερογενών ηλεκτρονίων και φωτονίων αυξάνεται, ενώ η ενέργεια του καθενός τους μειώνεται. Αυτό, **μέχρις ότου η ενέργειά τους γίνει μικρότερη της κριτικής ενέργειας (critical energy)** οπότε τα ηλεκτρόνια δεν κάνουν πια ακτινοβολία πέδησης, και **έτσι ο πολλαπλασιασμός των σωματιδίων του καταίγισμού σταματά**. Από εκεί και μετά η ενέργεια των εναπομεινάντων σωματιδίων του καταίγισμού χάνεται με ιονισμούς και διεγέρσεις στο υλικό που διασχίζουν.

Ανάπτυξη ΗΜ καταιγισμού (EM shower)

- Κατά μέσο όρο: το ηλεκτρόνιο μετά από μήκος X_0 (= 1 radiation length) έχει μείνει με το $1/e$ της ενέργειάς του, δηλ. έχει χάσει τα $\sim 2/3$, το δε φωτόνιο, σε απόσταση $\sim 7/9 X_0$ κάνει δίδυμη γένεση.
- Οπότε το X_0 είναι μια χαρακτηριστική κλίμακα μήκους για τη δημιουργία μιας “γενιάς νέων σωματιδίων” στον ΗΜ καταιγισμό.
- Ένα απλό μοντέλο της ανάπτυξης ΗΜ καταιγισμού είναι το εξής: κάθε απόσταση X_0 έχουμε μια νέα γενιά σωματιδίων, που μοιράζονται την ενέργεια των γονιών:
 - Ένα ηλεκτρόνιο σε απόσταση X_0 ακτινοβολεί ένα φωτόνιο, και έτσι έχουμε πια 2 σωματίδια ($e \rightarrow e \gamma$).
 - Επίσης, ένα φωτόνιο σε απόσταση X_0 κάνει δίδυμη γένεση και έχουμε πάλι 2 σωματίδια ($\gamma \rightarrow e^+ e^-$).
 - Έτσι κάθε απόσταση X_0 έχουμε διπλασιασμό των σωματιδίων του καταιγισμού.

Ανάπτυξη ΗΜ καταιγισμού (EM shower)

- Αν μετράμε την απόσταση, x , σε μονάδες X_0 , τότε σε απόσταση $t = \frac{x}{X_0}$ το πλήθος, $n(t)$, και η ενέργεια, $e(t)$, του κάθε σωματιδίου στον καταιγισμό θα είναι:

$$n(t) = 2^t, \text{ και } e(t) = \frac{E}{n(t)} = \frac{E}{2^t}$$

- Το μέγιστο πλήθος το έχουμε όταν $e(t) = E_c$ (critical energy):

$$E_c = \frac{E}{2^{t_{max}}} \rightarrow 2^{t_{max}} = \frac{E}{E_c} \equiv y \rightarrow t_{max} = \frac{\ln\left(\frac{E}{E_c}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln y}{\ln 2}$$

$$n(t_{max}) = 2^{t_{max}} = \frac{E}{E_c} \equiv y$$

- Από εκεί και μετά:

- Ηλεκτρόνια με ενέργεια $< E_c$ δεν πάνε μακριά ($< 1 X_0$ ακόμα).

- Η υπόλοιπη ενέργεια του καταιγισμού μεταφέρεται από τα φωτόνια, που απορροφούνται ακολουθώντας τη γνωστή εκθετική μείωση του πληθυσμού τους: $I = I_0 e^{-\mu x}$

Ανάπτυξη ΗΜ καταιγισμού (EM shower)

- Το βάθος όπου εμφανίζεται το μέγιστο ανάπτυξης του καταιγισμού μεγαλώνει λογαριθμικά με την ενέργεια: $t_{max} = \ln\left(\frac{E}{E_c}\right) / \ln 2$
- Επίσης, ξέρουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το Z του υλικού, τόσο η E_c είναι μικρότερη $E_c = [800 \text{ MeV}] / (Z + 1.2)$

οπότε σε υλικά με μεγάλο Z, το μέγιστο είναι σε μεγαλύτερο βάθος, [εδώ για ηλεκτρόνια ενέργειας 10 GeV σε τρία διαφορετικά υλικά]:

- Το μέγιστο για ΗΜ καταιγισμό που ξεκινά από e^- είναι:

$$t_{max} = \ln\left(\frac{E}{E_c}\right) / \ln 2 - 0.5$$

- ενώ όταν ξεκινά από γ είναι 1 X_0 αργότερα:

$$t_{max} = \ln\left(\frac{E}{E_c}\right) / \ln 2 + 0.5$$

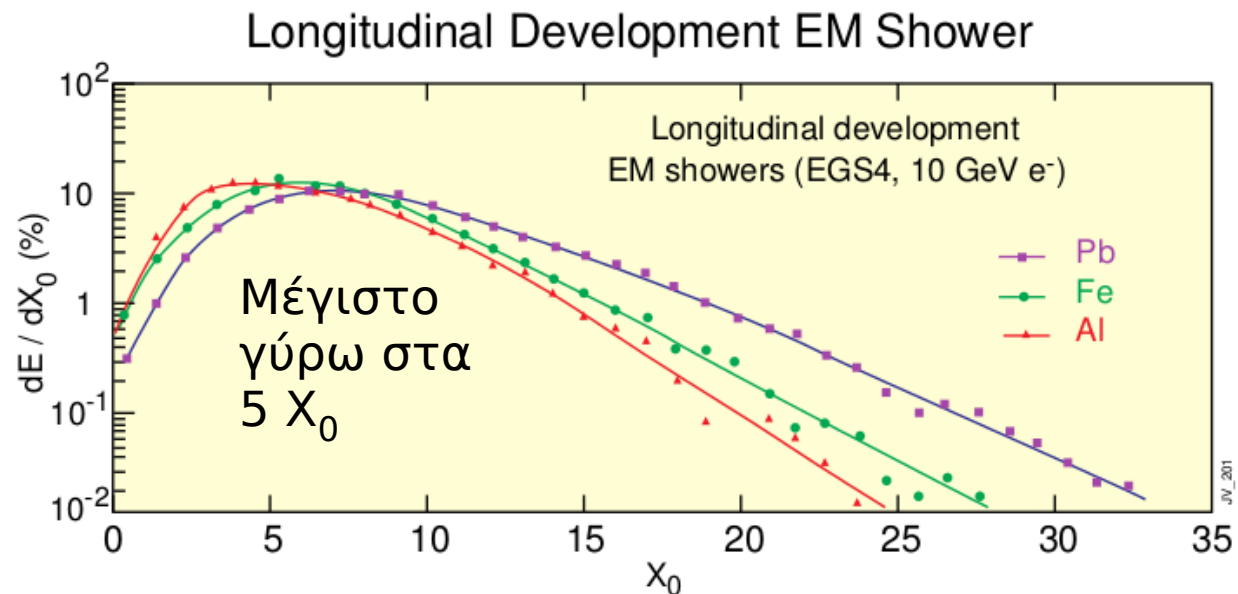
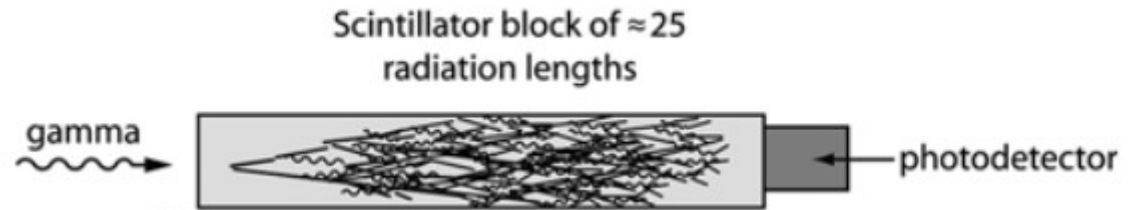


Figure 9: Simulation of longitudinal development of 10 GeV electron showers in Al, Fe and Pb.

Ανάπτυξη ΗΜ καταιγισμού (EM shower)

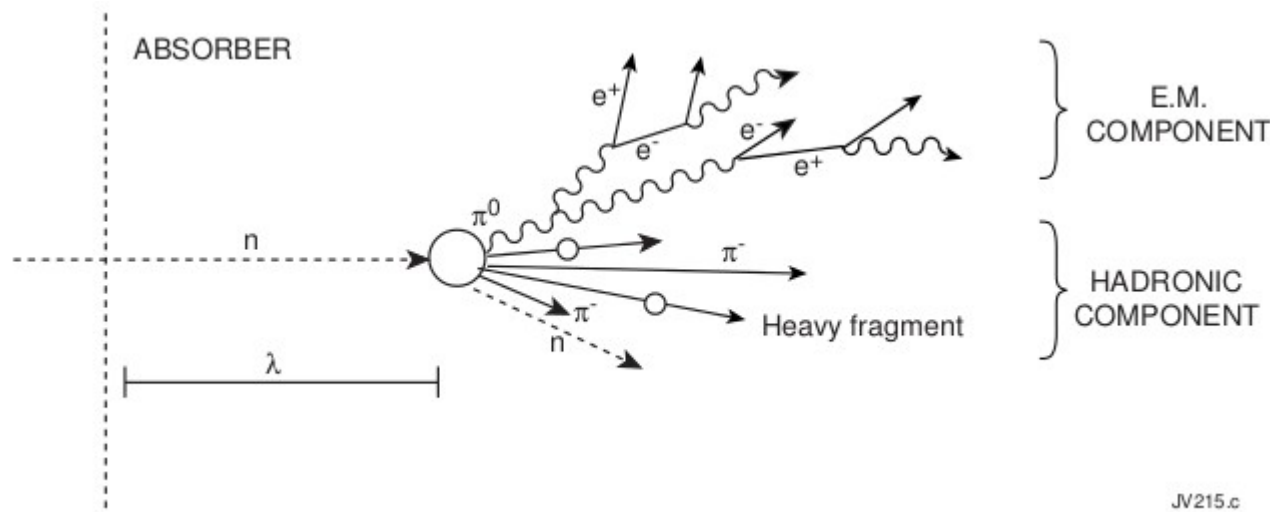
- Τυπικά, σε 25-30 X_0 βάθος όλη η ενέργεια του αρχικού ηλεκτρονίου ή φωτονίου έχει απορροφηθεί.



- Η ανάπτυξη του καταιγισμού κάθετα στον μεγάλο, κατά μήκος, άξονά του, καθορίζεται από τις πολλαπλές σκεδάσεις των ηλεκτρονίων του καταιγισμού. Όσο προχωράει ο καταιγισμός τόσο απλώνει και στην κάθετη κατεύθυνση.
 - Το γεγονός ότι στην αρχή του, ο ΗΜ καταιγισμός είναι πολύ στενός, χρησιμοποιείται για να ξεχωρίσει ΗΜ καταιγισμούς ενός φωτονίου, από ΗΜ καταιγισμούς που ξεκινάνε από 2 φωτόνια από τη διάσπαση ενός ουδέτερου πιονίου ($\pi^0 \rightarrow \gamma \gamma$)
- Το χαρακτηριστικό μήκος στην κάθετη κατεύθυνση είναι η ακτίνα Moliere, R_M (δές πίνακες με χαρακτηριστικά σπινθηριστών μερικές σελίδες πριν)
- Ένας κύλινδρος απείρου μήκους, με ακτίνα R_M περιέχει το 90% της ενέργειας του ΗΜ καταιγισμού. Σε ακτίνα $2 R_M$ έχουμε το 95% της ενέργειας.

Ανάπτυξη αδρονικού καταιγισμού (hadronic shower)

- Κατ' αναλογία με τους ΗΜ καταιγισμούς, όταν ένα αδρόνιο (πχ. πρωτόνιο) πέσει πάνω σε πυκνή ύλη, αναπτύσσονται “αδρονικοί καταιγισμοί” : αυτοί αναπτύσσονται λόγω της ισχυρής αλληλεπίδρασης, αντί της ΗΜ.
- Πολλά σωματίδια παράγονται κατά την αλληλεπίδραση του επερχόμενου αδρονίου με την ύλη. Ο καταιγισμός περιέχει δύο ξεχωριστά μέρη, ένα ηλεκτρομαγνητικό (κυρίως ουδέτερα πιόνια, π_0), και ένα αδρονικό ($\pi^{+/-}$, νετρόνια, κλπ.).
- Το χαρακτηριστικό μήκος αδρονικής αλληλεπίδρασης ονομάζεται “μήκος αλληλεπίδρασης” (interaction length), λ . Σε υλικό πυκνότητας ρ [$g\ cm^{-3}$] και μαζικού αριθμού A είναι περίπου:



$$\lambda \simeq \frac{35 [g\ cm^{-2}] \cdot A^{1/3}}{\rho [g\ cm^{-3}]}$$

Ανάπτυξη αδρονικού καταιγισμού (hadronic shower)

- Κατ' αναλογία με τον ΗΜ καταιγισμό:
- Απλό μοντέλο της ανάπτυξης του αδρονικού καταιγισμού:
κάθε απόσταση ενός μήκους αλληλεπίδρασης, λ , έχουμε μια νέα γενιά σωματιδίων, που μοιράζονται την ενέργεια των γονιών:
 - Κατά μέσο όρο παράγονται $\langle n \rangle$ δευτερογενή σωματίδια, για κάθε 1 σωματίδιο της προηγούμενης γενιάς.
 - Ο καταιγισμός αναπτύσσεται όσο μπορούν να παραχθούν πιόνια, οπότε μέχρις ότου κάθε σωματίδιο στον καταιγισμό έχει ακόμα ενέργεια μεγαλύτερη από κάποια ενέργεια κατωφλίου, ίση με 2 μάζες πιονίου:

$$E_{threshold} = E_{th} = 2 m_{\pi}$$

Ανάπτυξη αδρονικού καταιγισμού (hadronic shower)

- Αν μετράμε την απόσταση, x , σε μονάδες λ , τότε σε απόσταση $t = \frac{x}{\lambda}$ το πλήθος, $n(t)$, και η ενέργεια, $e(t)$, των σωματιδίων στον καταιγισμό θα είναι:

$$n(t) = \langle n \rangle^t, \text{ και } e(t) = \frac{E}{n(t)} = \frac{E}{\langle n \rangle^t}$$

- Το μέγιστο πλήθος το έχουμε όταν $e(t) = E_{th} = 2 m_{\pi}$:

$$E_{th} = \frac{E}{\langle n \rangle^{t_{max}}} \rightarrow \langle n \rangle^{t_{max}} = \frac{E}{E_{th}} \rightarrow t_{max} = \frac{\ln\left(\frac{E}{E_{th}}\right)}{\ln \langle n \rangle} \quad n(t_{max}) = \langle n \rangle^{t_{max}} = \frac{E}{E_{th}}$$

- Παραμετροποίηση του βάθους όπου έχουμε το μέγιστο ανάπτυξης του αδρονικού καταιγισμού δίνει:

α) μέγιστο ανάπτυξης σε βάθος: $t_{max} \simeq 0.2 \ln E + 0.7, [E \text{ σε GeV}]$

και

β) το 95% του καταιγισμού είναι μέχρι βάθος: $L_{max} = t_{max} + 2 \lambda E^{0.13}$

Ανάπτυξη αδρονικού καταιγισμού (hadronic shower)

- **Ανάπτυξη κατά μήκος:**

- Παραμετροποίηση του βάθους όπου έχουμε το μέγιστο ανάπτυξης του αδρονικού καταιγισμού:

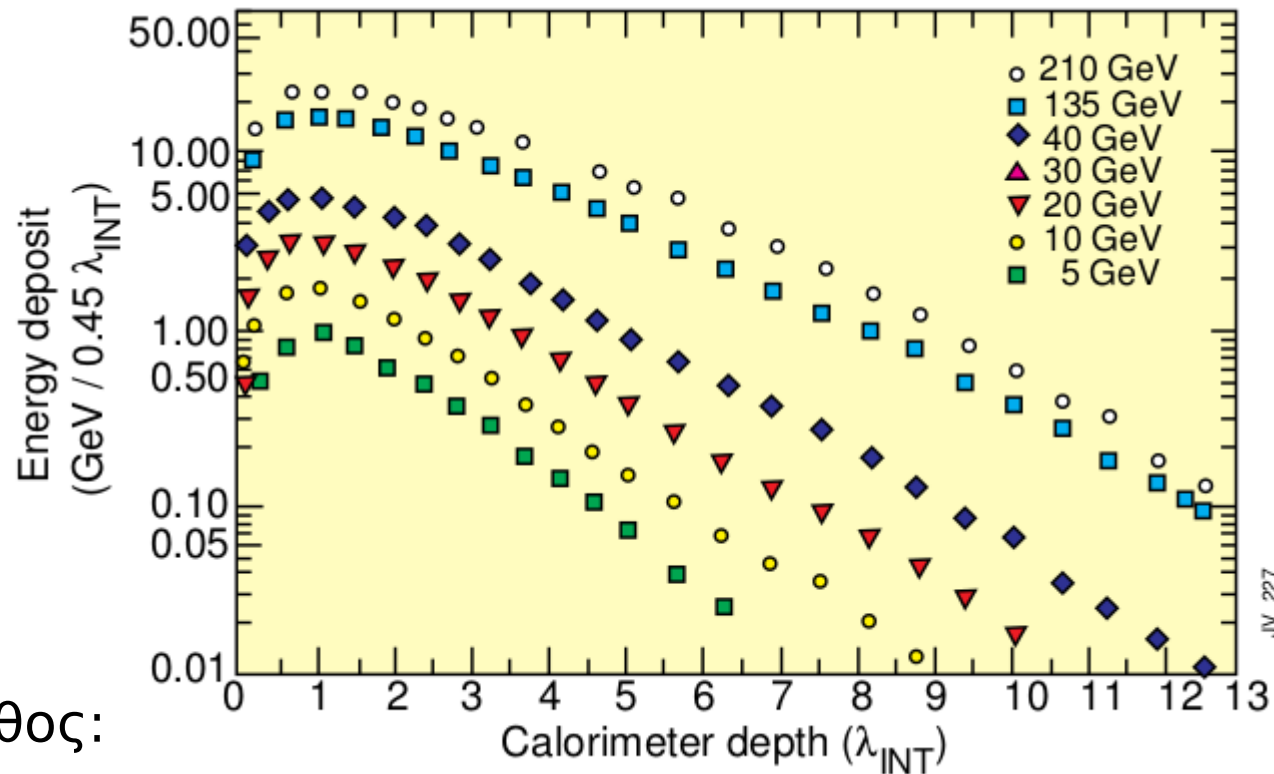
$$t_{max} \simeq 0.2 \ln E + 0.7, [E \text{ σε GeV}]$$

- Και ότι το 95% του καταιγισμού είναι μέχρι βάθος:

$$L_{max} = t_{max} + 2 \lambda E^{0.13}$$

- **Ανάπτυξη κάθετα στον μεγάλο άξονα:**

- ένας **πυρήνας** λόγω των π^0 με χαρακτηριστική διάσταση την ακτίνα Moliere, \mathbf{R}_M , και
- Μέσα σε μία εκθετικά μειούμενη δραστηριότητα με **κλίμακα λ**



Μέτρηση της ενέργειας

- Ο καταγισμός ή
 - μετριέται σε σπινθηριστή, οπότε η ενέργεια του προσπίπτοντος σωματιδίου γίνεται φωτόνια στο ορατό, και μετά ένα ποσοστό από αυτά γίνεται φωτοηλεκτρόνια σε έναν φωτοπολλαπλασιαστή, ή
 - μετριέται με “θαλάμους ιονισμού” όπου το σήμα μας είναι ανάλογο του πλήθους των φορτισμένων σωματιδίων που ανιχνεύουμε.

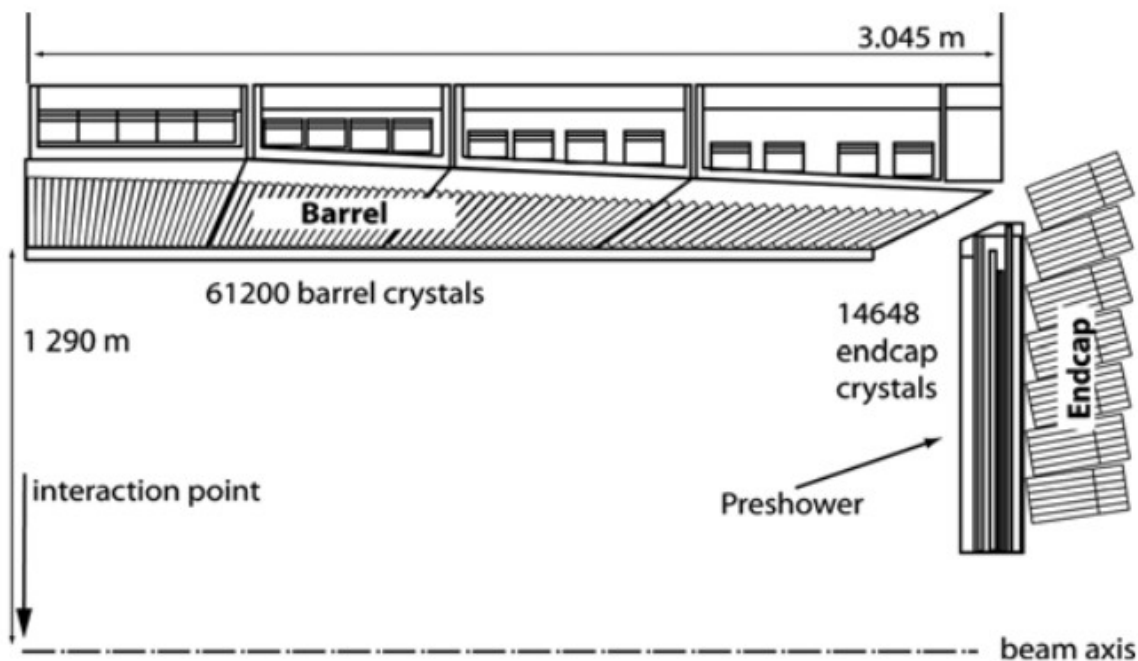


Fig. 6.23 Electromagnetic calorimeter of the CMS experiment. This figure shows one quarter of the detector. The beam-beam interaction point is in the lower left corner of the figure. The detector consists of $\approx 80,000$ blocks of PbWO_4 calor pointing towards the interaction point

Μέτρηση της ενέργειας με ομοιογενές υλικό

- Αν μετράμε ολόκληρο τον καταγισμό, μετράμε τον μέγιστο δυνατό αριθμό φωτοηλεκτρονίων ή ιονισμών, οπότε έχουμε και την ελάχιστη σχετική αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας. Η σχετική αβεβαιότητα λόγω της στατιστικής διασποράς στον αριθμό των φωτοηλεκτρονίων είναι:

$$\sigma/E \sim \sqrt{N_e}/N_e \sim 1/\sqrt{N_e} \sim \sqrt{W/E} \sim \mathbf{1/\sqrt{E}}$$

- Εκτός από τον στατιστικό όρο (“stochastic” term), στο σφάλμα συνεισφέρει και ένας σταθερός όρος, που έχει να κάνει με ανομοιογενή απόκριση στα διάφορα μέρη του ανιχνευτή. Οπότε

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{E} + b^2} \equiv \frac{a}{\sqrt{E}} \oplus b$$

με την ενέργεια E να δίνεται τυπικά σε GeV στον τύπο αυτό.

- π.χ το πείραμα **CMS** έχει **ομοιογενείς** κρυστάλλους PbWO_4 με **$\alpha=3\%$** ,
 $\beta=0.5\%$

Μέτρηση της ενέργειας δειγματοληπτικά

- Αν δεν μετράμε όλον τον καταγισμό (γιατί χρειάζονται $>25 X_0$ για να τον μετρήσουμε όλον, αλλά οι ομοιογενείς σπινθηριστές είναι ακριβοί...) τότε τον μετράμε δειγματοληπτικά (**sampling calorimeters**) έχοντας υλικό “απορροφητή” ανάμεσα στα μέση με “ενεργό υλικό”.
- Έτσι, μετράμε μόνο ένα μέρος του καταγισμού κι έτσι έχουμε **μεγαλύτερη αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας**.
- Αν έχουμε ένα σάντουιτς από ενεργά και παθητικά στρώματα, ουσιαστικά μετράμε τον αριθμό φορτισμένων σωματιδίων που διασχίζουν τα ενεργά στρώματα.
- Ο αριθμός των τροχιών αυτών φτάνει σε κάποιο μέγιστο αριθμό, $N_{max} = E_c / E \rightarrow$ σημείο μέγιστης ανάπτυξης του καταγισμού. Επειδή ο αριθμός των τροχιών στον καταγισμό κυριαρχείται από το N_{max} , κάπως απλοϊκά μπορούμε να πούμε:

$$\frac{\sigma(E)}{E} \simeq \sqrt{\frac{1}{N_{max}}} = \sqrt{\frac{E_c}{E}}$$

- π.χ το πείραμα **ATLAS** έχει **sampling calorimeter** με ενεργό υλικό υγρό άζωτο (liquid Argon) και παθητικό μολύβι (Pb), με το σάντουιτς σε διάταξη ακορντεόν και δίνει **$\alpha=10\%$, $\beta=0.25\%$** $\frac{\sigma(E)}{E} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{E} + b^2} \equiv \frac{a}{\sqrt{E}} \oplus b$

ATLAS sampling LAr calorimeter

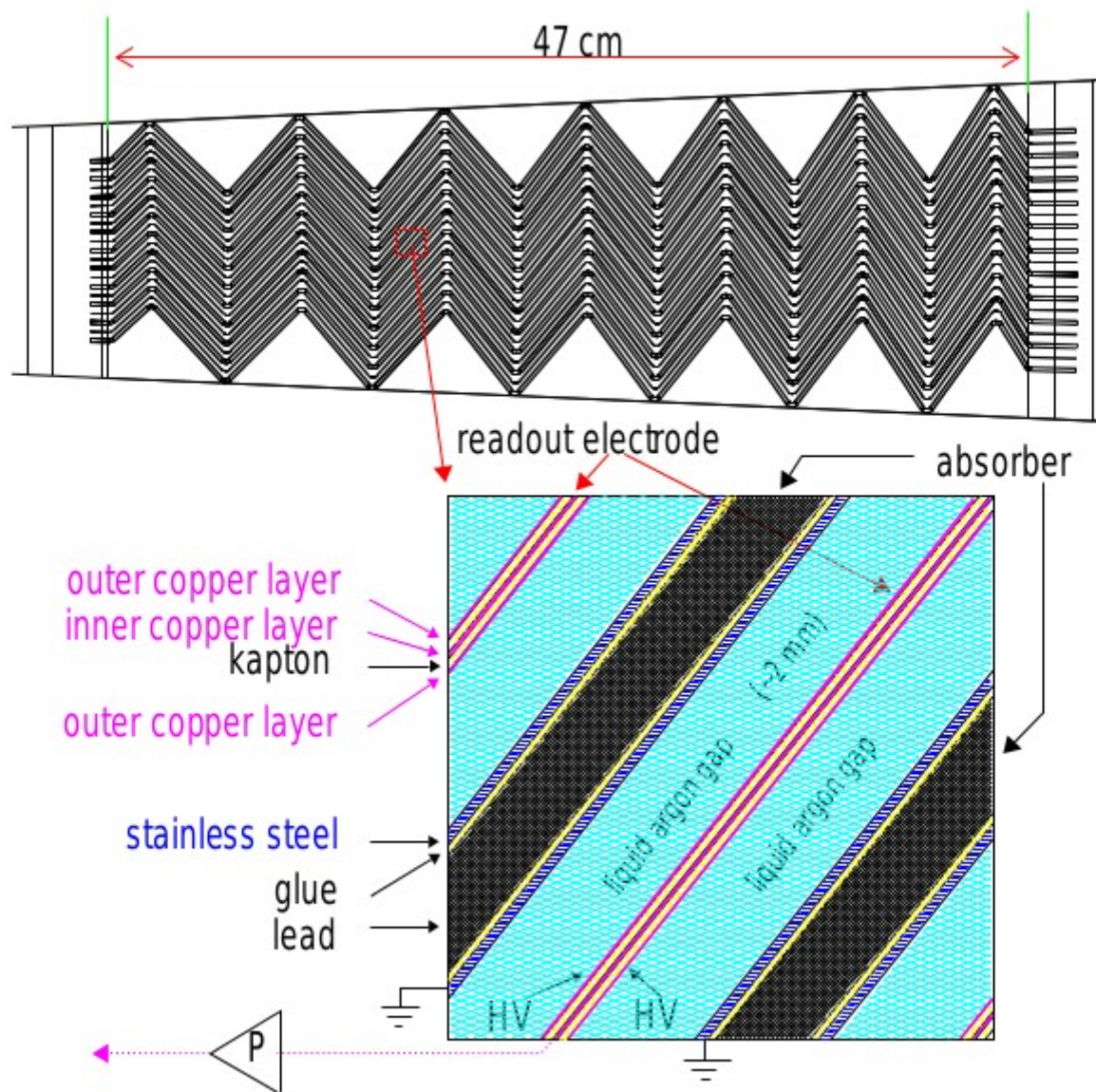


Figure 75: Top) the "accordion" structure of absorber plates of the ATLAS ECAL, below) details of the electrode structure.

Αδρονικοί καλορίμετροι

- Για να πιάσουμε όλον τον αδρονικό καταιγισμό θέλουμε τουλάχιστον 9-10 λ βάθος (λ =interaction length). Πολύ υλικό → όλα τα αδρονικά καλορίμετρα είναι sampling, κυρίως με Fe για παθητικό υλικό και πλαστικό σπινθηριστή για ενεργό. Έτσι, δεν ξεκινάμε ήδη με και με τον καλύτερο δυνατο σφάλμα στη μέτρηση της ενέργειας.
- Το μεγαλύτερο πρόβλημα όμως είναι η διαφορετική απόδοση του καλορίμετρου στο αδρονικό και το ηλεκτρομαγνητικό κομμάτι του καταιγισμού:
 - ~50% της ενέργειας πηγαίνει στη διάσπαση πυρήνων, που τα προϊόντα δεν έχουν καλή απόδοση στο να παράγουν φωτόνια από σπινθηρισμό, οπότε δεν μετράμε αυτή την ενέργεια.
 - Στην αρχή του καταιγισμού, περίπου το 30% της ενέργειας πάει σε $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ (ηλεκτρομαγνητικός καταιγισμός). Το ποσοστό αυτό είναι 30% για 10 GeV, και γίνεται ~60% για 1 TeV. Έχοντας πολύ διαφορετική απόδοση του καλοριμέτρου στο ΗΜ και στο αδρονικό κομμάτι του καταιγισμού, μικρές διαφορές στην αναλογία τους, οδηγεί σε μεγάλη διασπορά στη μέτρηση της ενέργειας των αδρονικών καταιγισμών:

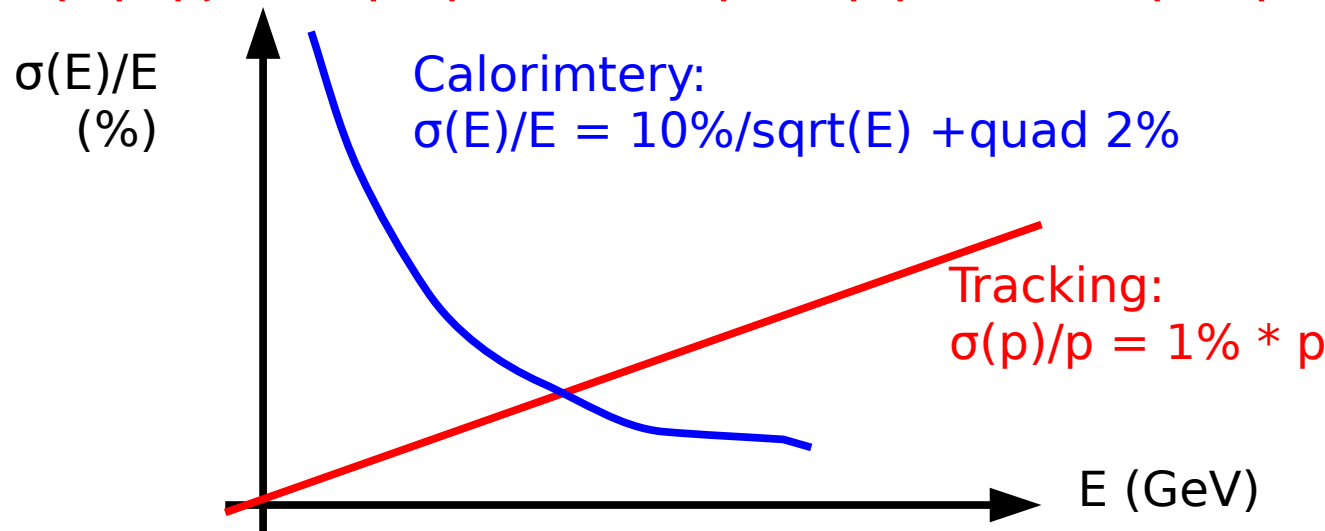
$$\frac{\sigma(E)}{E} \simeq \frac{60\%}{\sqrt{E[\text{GeV}]}}$$

Καλοριμετρία: ακρίβεια μέτρησης ενέργειας καλυτερεύει όσο μεγαλώνει η ενέργεια

- Όσο μεγαλύτερη η ενέργεια του προσπίπτοντος σωματιδίου
 - τόσο περισσότερα σωματίδια παράγονται στο shower
 - τόσο περισσότερες μετρήσεις έχουμε για το shower
 - τόσο καλύτερη μέτρηση της ενέργειας έχουμε
- $\sigma(E)/E \sim 1/\text{sqrt}(E)$. Π.χ., $\sigma(E)/E = 10\% / \text{sqrt}(E) + \text{quad } 2\%$

Δηλαδή:

αντίθετα με τη μέτρηση της ορμής,
η μέτρηση της ενέργειας στον καλορίμετρο γίνεται όλο και πιο
ακριβής όσο μεγαλώνει η ενέργεια του μετρούμενου σωματιδίου!

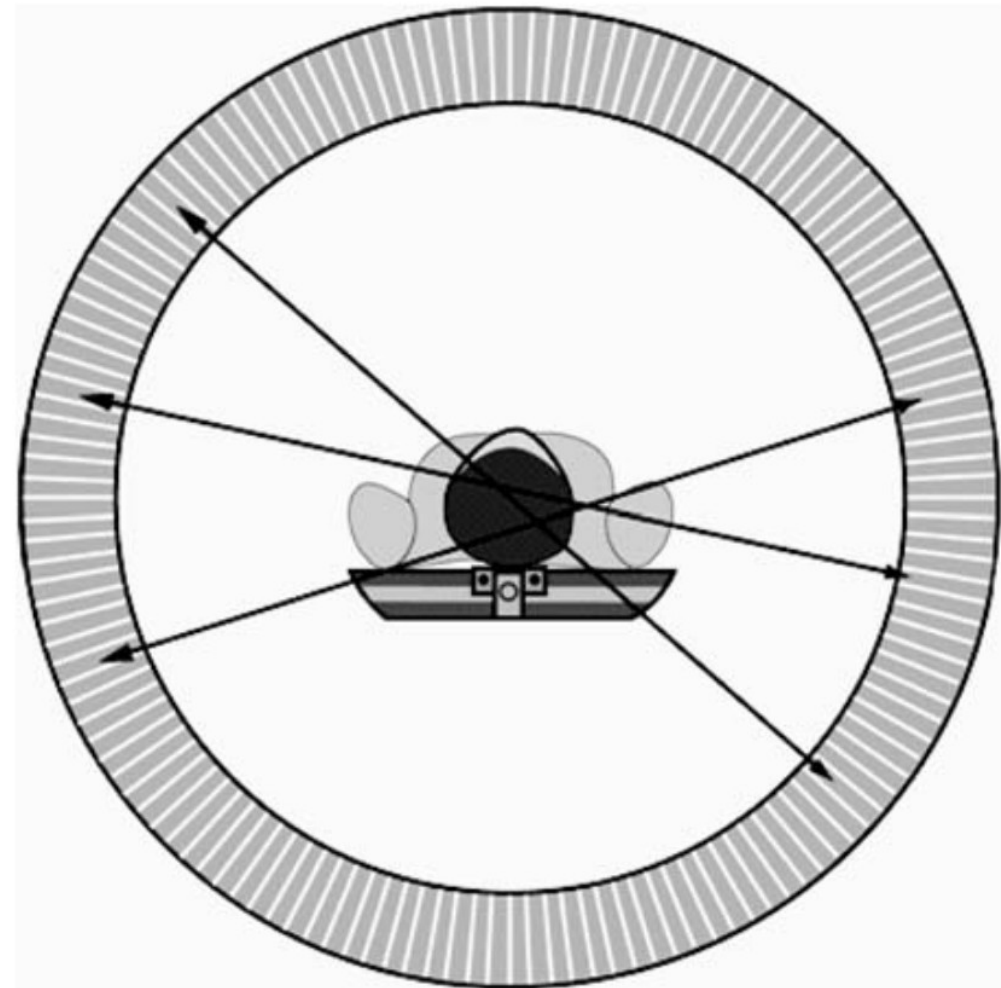


Από κάποια ενέργεια ηλεκτρονίων και πάνω, η μέτρηση ενέργειας από τον καλορίμετρο είναι πολύ καλύτερη από του tracker

Εφαρμογή σπινθηριστών στη διαγνωστική - PET (Positron Emission Tomography)

- Ραδιενεργό ισότοπο αντικαθιστά ένα ίδιο άτομο στον οργανισμό: ολόϊδια χημική συμπεριφορά. Κάποια στιγμή όμως αυτό διασπάται με e^+ (~ 500 keV). Μετά: e^+ βρίσκει e^- σε ηρεμία $\rightarrow \gamma + \gamma$. Κάθε γ έχει ενέργεια 511 keV, και εξέρχονται σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Fig. 6.29 Figure illustrating the principle of a PET scanner. The white lines represent the directions of flight of the gamma rays originating from a few annihilation events. These gamma rays interact in the scintillator blocks. If two gamma rays interact simultaneously in two scintillator blocks, one assumes a positron annihilation occurred somewhere along the line joining the centres of the two blocks of scintillating material



απο το βιβλίο
“Experimental
Techniques in Nuclear
And Particle Physics”,
Stefaan Tavernier, 2010

Εφαρμογή σπινθηριστών στη διαγνωστική - PET

- Ραδιενεργό ισότοπο ανιοτκαθιστά ένα ίδιο άτομο στον οργανισμό: ολόϊδια χημική συμπεριφορά. Κάποια στιγμνή όμως αυτό διασπάται με e^+ (~ 500 keV). Μετά, $e^+ e^-$ σε ηρεμία $\rightarrow \gamma + \gamma$, κάθε γ με ενέργεια 511 keV, εξερχόμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις.

Table 6.5 Most commonly used isotopes in PET

Isotope	Half-life [min]	Max e^+ energy [keV]
^{11}C	20.4	960
^{13}N	9.96	1190
^{15}O	2.05	1720
^{18}F	110.	625

απο το βιβλίο
“Experimental
Techniques in Nuclear
And Particle Physics”,
Stefaan Tavernier, 2010

Table 6.4 Scintillators for positron emission tomography

Material (*)	Density	Att. length [mm] at 511 keV	Photo- fraction [%] at 511 keV	Light yield [ph/MeV]	Decay time [ns]	Emission [nm]
BGO	7.1	10.4	40	9000	300	480
LSO	7.4	11.4	32	26,000	40	420
GSO	6.7	14.1	25	8000	60	440
LuAP	8.3	10.5	30	11,000	18	365
LPS	6.2	14.1	29	20,000	30	380
LaBr ₃	5.07	22.3	13.1	70,000	16	380

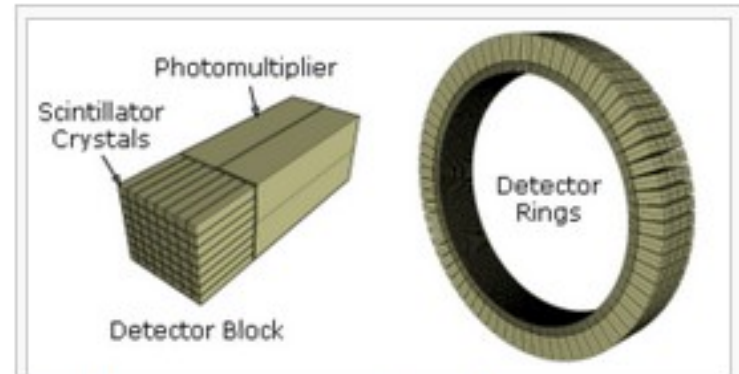
(*) BGO = $\text{Bi}_4\text{Ge}_3\text{O}_{12}$; LSO = $\text{Lu}_2\text{SiO}_5:\text{Ce}$; GSO = $\text{Gd}_2\text{SiO}_5:\text{Ce}$; LuAP = $\text{LuAlO}_3:\text{Ce}$; LPS = $\text{Lu}_2\text{Si}_2\text{O}_7:\text{Ce}$

Εφαρμογή σπινθηριστών στη διαγνωστική - PET

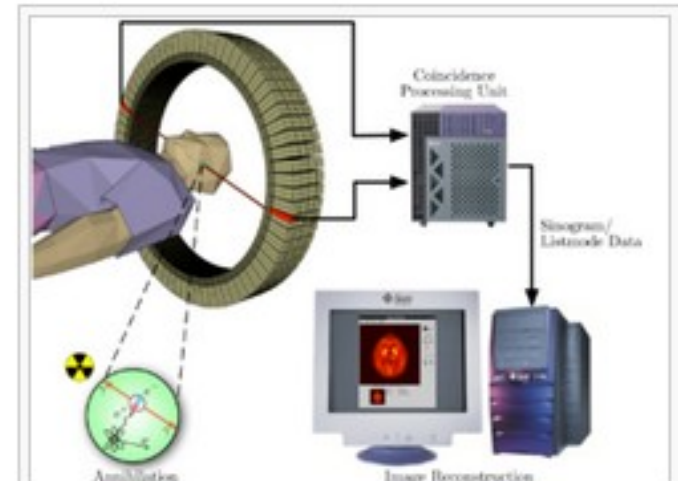
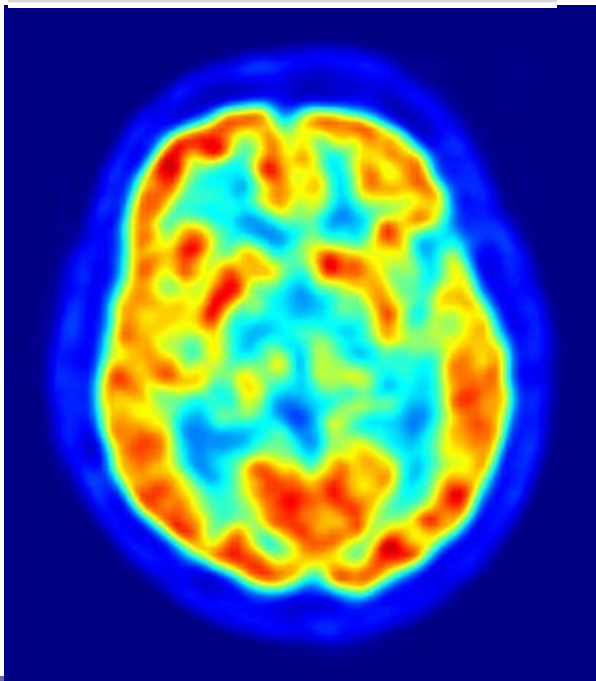
απο wikipedia



PET/CT-System with 16-slice CT; the ceiling mounted device is an injection pump for CT contrast agent



Schematic view of a detector block and ring of a PET scanner



Schema of a PET acquisition process

Ασκήσεις

- Εργασία #4 : άσκηση 4.4 έως τέλος

Εκτος ύλης τα υπόλοιπα στις επόμενες
σελίδες

Fano factor

It is instructive to look at homogeneous calorimeters in which all the energy is deposited in the active medium. If the shower is fully contained then the intrinsic energy resolution is determined by the fluctuation in the number, n , of ions or photons produced. If W is the mean energy required to produce an electron-ion pair (or a photon) then $n = E/W$, and

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{\frac{W}{E}}$$

However the fluctuation is smaller as the total energy deposited (= incident energy) does not fluctuate. The improvement in resolution is characterised by the Fano factor, F , as

$$\frac{\sigma}{E} = \sqrt{F} \times \sqrt{\frac{W}{E}} = \sqrt{\frac{FW}{E}}$$

F is dependent on the nature of processes that lead to energy transfer in the detector including ones that do not lead to ionisation e.g. phonon excitations.

Consider calorimeters used for the spectroscopy of low energy (\approx MeV) gamma rays. The two commonly used detectors are inorganic scintillators (e.g. NaI) and semiconductor detectors (e.g. Ge). The energy resolution of the Ge detector is superior and is measured to be $\sigma \approx 180$ eV for photons carrying 100 keV. The above formula gives $\sigma = \sqrt{(FEW)} \approx 195$ eV where $F_{\text{Ge}}=0.13$ and $W=2.96$ eV. It should be noted that without the Fano factor $\sigma \approx 540$ eV!

Excess noise factor – αν και ο πολλαπλασιασμός των φωτοηλεκτρονίων έχει διακυμάνσεις

Consider a crystal with a light yield of N_γ photons/MeV. $N_\gamma E$ photons hit the APD for an energy deposit E . Assuming a quantum efficiency Q (which can easily be $\approx 85\%$ for APDs),

No. of photoelectrons is $N_{pe} = N_\gamma E Q$

Then the photostatistics fluctuation is $\pm \sqrt{N_{pe}}$

If there is no fluctuation in the gain process then the no. electrons transferred to the amplifier is (M=gain) $M N_{pe} \pm M \sqrt{N_{pe}}$

BUT if the multiplication process is noisy and the gain itself has a fluctuation, σ_M , then the no. of electrons is $M N_{pe} \pm \sqrt{(M^2 + \sigma_M^2)} \sqrt{N_{pe}}$

Hence the photostatistics contribution to the energy resolution becomes

$$\frac{\sigma_{pe}(E)}{E} = \frac{1}{\sqrt{N_\gamma E Q}} \sqrt{\frac{M^2 + \sigma_M^2}{M^2}} = \frac{1}{\sqrt{N_\gamma E Q}} \sqrt{F}$$

where F is called the ‘excess noise factor’ and quantifies the induced degradation in the energy resolution due to fluctuations in the amplification process. Typically for APDs $F \approx 2$ and for photomultipliers $F \approx 1.2$. Some properties of APDs, from two manufactures, are listed in Table 5.